Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Online am:
07. 02. 2017

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielslösungen, Woche 14

14.1 Als Ableitungen f' der folgenden Funktionen $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ erhalten wir durch Anwendung der Differentiationsregeln:

(i) Für $f(x) := \sin\big(\frac{x}{\exp(-1/x)}\big)$ mit $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ergibt sich (Kettenregel)

$$f'(x) = \cos\big(x \exp(1/x)\big)\, \frac{d}{dx}\big(x \exp(1/x)\big),$$

und mit (Produkt- und Kettenregel)

$$\frac{d}{dx}\big(x \exp(1/x)\big) = \exp(1/x) - \frac{x}{x^2} \exp(1/x) = \big(1 - \frac{1}{x}\big) \exp(1/x)$$

folgt

$$f'(x) = \exp(1/x)\,\big(1 - \frac{1}{x}\big)\, \cos\big(x \exp(1/x)\big)$$

(ii) In $f(x) := \log\big(\big(\frac{1}{x^2} + 1\big) + \cos\big(\frac{4}{\log(x^4)}\big)\big)$ mit $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vereinfachen wir zuerst unter Benutzung von $4/\log(x^4) = 1/\log(x)$, was dann unter Verwendung der Kettenregel auf

$$f'(x) = \frac{1}{1/x^2 + 1 + \cos(1/\log x)} \frac{d}{dx}\big(1/x^2 + 1 + \cos(1/\log x)\big)$$

und mit

$$\frac{d}{dx}\big(1/x^2 + 1 + \cos(1/\log x)\big) = -\frac{2}{x^3} - \sin(1/\log x) \frac{-1}{(\log x)^2} \frac{1}{x}$$

auf die Ableitung führt

$$f'(x) = \frac{x^2 \sin(1/\log x) - 2(\log x)^2}{x(\log x)^2\,\big(1 + x^2(1 + \cos(1/\log x)\big)}$$

(iii) Für $f(x) := \sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + x^2}$ mit $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ erhalten wir durch analoges Vorgehen

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + x^2}} \frac{d}{dx}\left(\cos^2\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + x^2\right),$$

und wegen

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^2\left(\frac{1}{1+x^2}\right)+x^2\right) = 2\cos\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\left(-\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right)\frac{-1}{(1+x^2)^2}\,2x + 2x$$

folgt

$$f'(x) = \frac{x\left((1+x^2)^2 + \sin\left(2/(1+x^2)\right)\right)}{(1+x^2)^2\sqrt{x^2+\cos^2\left(1/(1+x^2)\right)}},$$

wobei auch Teil 6 (a) von Satz 4.28 verwendet wurde.

14.2 Zur Berechnung der folgenden Grenzwerte verwenden wir die Regeln von l'Hospital.

(i) Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}x}{\frac{d}{dx}\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

so dass wir erhalten

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \cdot 1 = 1.$$

(ii) Da

$$\frac{\frac{d}{dx}(1-\cos(x))}{\frac{d}{dx}x\sin(x)} = \frac{\sin x}{\sin x + x\cos x} = \frac{1}{1+\frac{x\cos x}{\sin x}}$$

ist, können wir das Ergebnis aus Teil (i) verwenden,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\frac{x\cos x}{\sin x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

(iii) Mit

$$\frac{\frac{d}{dx}\log(2x)}{\frac{d}{dx}x^{-3/2}} = \frac{x^{-1}}{-3x^{-5/2}/2} = -\frac{2x^{3/2}}{3}$$

folgt

$$\lim_{x\downarrow 0} \log(2x)\sqrt{x^3(x+1)} = \lim_{x\downarrow 0}\Big(-\frac{2x^{3/2}}{3}\Big) \lim_{x\downarrow 0}\sqrt{x+1} = 0\cdot 1 = 0.$$

14.3 Um die Maxima und Minima der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x) := e^{-2x}\big(12x^2-4x+1\big)$ zu bestimmen, bilden wir die Ableitungen

$$f'(x) = -24\big(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{4}\big)\exp(-2x)$$

und

$$f^{(2)}(x) = 4(2x-1)(6x-11)\exp(-2x).$$

Die erste Ableitung f' besitzt maximal zwei reelle Nullstellen, nämlich die Wurzeln von $x^2 - 4x/3 + 1/4 = 0$, welche sich zu

$$x_\pm = \frac{4\pm\sqrt{7}}{6}$$

berechnen. Da

$$2x_- - 1 = \frac{4-\sqrt{7}}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1-\sqrt{7}}{3} < 0$$

und

$$6x_- - 11 = 4 - \sqrt{7} - 11 = -7 - \sqrt{7} < 0$$

gilt, erhalten wir $f^{(2)}(x_-) > 0$ für die zweite Ableitung an der Stelle x_-. Für x_+ hingegen ist

$$2x_+ - 1 = \frac{4+\sqrt{7}}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1+\sqrt{7}}{3} > 0,$$

während

$$6x_+ - 11 = 4 + \sqrt{7} - 11 = -7 + \sqrt{7} < 0$$

gilt, so dass sich für die zweite Ableitung an der Stelle x_+ ergibt $f^{(2n)}(x_+) < 0$. Damit besitzt die Funktion f genau zwei lokale Extrema, ein Minimun an der Stelle x_- und ein Maximum an der Stelle x_+.

14.4 Wir überprüfen, ob die Ableitungen von folgenden Funktionen $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine Nullstelle auf $\mathcal{D}$ besitzen.

(i) Sei $f(x) := \dfrac{x^3 - 2x^{-1} + 1}{x + 2}$ mit $\mathcal{D} = (0, 1)$. Die erste Ableitung von f berechnet sich zu

$$f'(x) = 2x - 2 + \frac{1}{x^2} + \frac{6}{(x+2)^2}.$$

Es ist $\lim_{x \uparrow 1} f'(x) = 5/3$, während für $x \downarrow 0$ die Ableitung gegen $+\infty$ strebt. Da für die zweite Ableitung und für alle $0 < x < 1$ gilt

$$f''(x) = 2(1 - x^{-3}) - 12(x+2)^{-3} < 0,$$

ist die erste Ableitung f' strikt monoton fallend, womit dann $f'(x) > \lim_{x \uparrow 1} f'(x) = 5/3 > 0$ folgt, so dass es keine Nullstelle von f' im Interval $(0, 1)$ gibt.

(ii) Für $f(x) := \dfrac{x^{-3} + 3x^6 + 1}{x^2 + 1}$ mit $\mathcal{D} = (0, \infty)$ erhalten wir als erste Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(6x^5 - x^{-4})}{x^2 + 1} - \frac{2x(1 + x^{-3} + 3x^6)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{12x^{11} + 18x^9 - 2x^5 - 5x^2 - 3}{x^4(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Für $x \downarrow 0$ strebt f' nach $-\infty$ und für $x \to \infty$ nach $+\infty$ (siehe Aufgabe 6.1). Da f' als eine rationale Funktion (ohne Nullstellen im Nenner) stetig ist, muss es aufgrund des Zwischenwertsatzes ein $x_0 \in (0, \infty)$ geben, so dass $f'(x_0) = 0$ gilt.

14.5 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei zweimal differenzierbar und erfülle $f(x^2) = f(x) + x(x^2 - 1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach Kettenregel erhalten wir durch Ableitung obiger Gleichung

$$2xf'(x^2) = f'(x) + 3x^2 - 1.$$

Für die zweite Ableitung ergibt sich

$$2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2) = f''(x) + 6x.$$

Für $x = 1$ folgt aus der Gleichung für die erste Ableitung $f'(1) = 2$. Dieses in die Gleichung für die zweite Ableitung eingesetzt, führt auf $f''(1) = 2/3$.