Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Online am:
31. 01. 2017

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielslösungen, Woche 13

13.1 (a) Um festzustellen, ob die untenstehenden Gleichungen eine Lösung x_0 mit $0 \leq x_0 < \pi/2$ besitzen, werden wir die Stetigkeit und den Zwischenwertsatz verwenden:

(i) Wir setzen $f(x) := \big(\sin x\big)^2 - \cos\big(\frac{\pi \sin x}{2}\big)$ und beachten, dass wegen $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$ folgt $f(0) = 0 - 1 = -1$. Wegen $\lim_{x \uparrow \pi/2} \sin x = 1$ und

$$\lim_{x \uparrow \pi/2} \cos\Big(\frac{\pi \sin x}{2}\Big) = \cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 0$$

erhalten wir $\lim_{x \uparrow \pi/2} f(x) = 1$. Somit gibt es ein $a \in [0, \pi/2)$ für welches $f(a) > 0$ ist. Aufgrund der Stetigkeit von cos und sin sowie der Stetigkeit der Hintereinanderausführung von stetigen Funktionen können wir den Zwischenwertsatz anwenden und daraus schliessen, dass $f(x_0) = 0$ für ein $0 < x_0 < a$ gelten muss.

(ii) Hier setzen wir $g(x) := \exp\big(-\frac{1}{\cos x}\big) - \sin(2x)$; dann wird $g(0) = \exp(-1) - 0 = 1/e > 0$. Andererseits gilt $\exp\big(-1/\cos(\pi/4)\big) = \exp\big(-\sqrt{2}\big) < 1$ und $\sin(2\pi/4) = 1$, woraus $g(\pi/4) = \exp\big(-\sqrt{2}\big) - 1 < 0$ folgt. Stetigkeit von g auf $\mathcal{D}$ und Zwischenwertsatz liefern dann die Existenz eines $0 < x_0 < \pi/4$ mit $g(x_0) = 0$.

(b) Um den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} n \sin\big(\dfrac{x}{n}\big)$ für $x \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, können wir Lemma 4.30 benutzen, wonach für $y \in (0, 2]$ die Schranken $y - y^3/6 < \sin y < y$ gelten. Da für $n \geq x/2$ die Voraussetzungen für diese Schranken erfüllt sind, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{x}{n} - \frac{x^3}{n^3}\Big) = x - \lim_{n\to\infty} \frac{x^3}{n^2} = x \leq \lim_{n\to\infty} n \sin\Big(\frac{x}{n}\Big) \leq \lim_{n\to\infty} n\frac{x}{n} = x,$$

also $\lim_{n\to\infty} n \sin\big(\dfrac{x}{n}\big) = x$.

13.2 Wir untersuchen die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Periodizität.

(i) Wenn eine Funktion g die kleinste Periode b besitzt, ist das kleinste $c > 0$ mit $g\big((x+c)/3\big) = g(x/3)$ (für alle $x \in \mathbb{R}$) gegeben durch $c/3 = b$, also $c = 3b$. Andererseits gilt $|\sin(y + \pi)| = |-\sin(y)| = |\sin(y)|$ für alle $y \in \mathbb{R}$, welches die Periodizität von $|\sin|$ mit der Periode π zeigt. Kombiniert man beide Tatsachen, ergibt sich $a = 3\pi$ als Periode von $f(x) := |\sin(\frac{x}{3})|$.

(ii) In Teil (i) von Aufgabe 13.4 wird gezeigt, dass $g(x) := \sin|x|$ bei $x = 0$ nicht differenzierbar ist. Analog lässt sich beweisen, dass auch $f(x) := \sin|\frac{x}{3}|$ bei $x = 0$ nicht differenzierbar ist. Für alle $x \geq 0$ gilt $f(x) = \sin|\frac{x}{3}| = \sin(\frac{x}{3})$ und für $x < 0$ gilt $f(x) = \sin|\frac{x}{3}| = \sin(\frac{-x}{3}) = -\sin(\frac{x}{3})$. Somit ist f für alle $x \neq 0$ differenzierbar (aufgrund der Differenzierbarkeit von sin, siehe Beispiel 5.3.3). Dieses steht im Widerspruch zu einer Periodizität von f, da für letztere es ja ein $a > 0$ mit $f(0+a) = f(0)$ geben müsste und somit f auch an der Stelle $x = a$ nicht differenzierbar sein müsste. (Dieses wird auch einsichtig durch Bild 1).

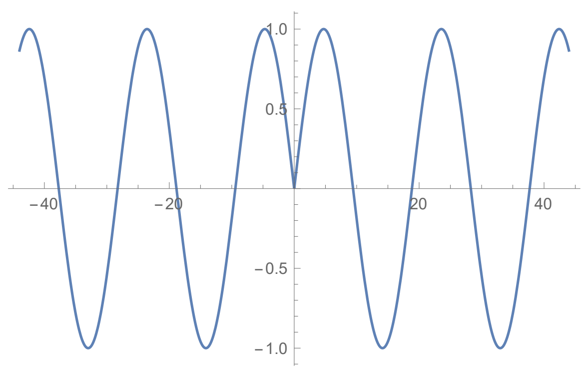

Bild 1. Die Funktion $x \mapsto \sin|x/3|$).

(iii) Aus Teil (i) folgt, dass die kleinste Periode von $f_1(x) := \sin(5x)$ durch $a_1 = 2\pi/5$ und die kleinste Periode von $f_2(x) := \sin(2x)$ durch $a_1 = 2\pi/2 = \pi$ gegeben ist. Um die kleinste Periode von $f(x) := \sin(5x) -$

$\sin(2x)$ zu erhalten, suchen wir die kleinsten $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, so dass $n_1a_1 = n_2a_2$ gilt. Diese ergeben sich durch $n_1(2\pi/5) = n_2\pi$, also $2n_1 = 5n_2$, zu $n_1 = 5$ und $n_2 = 2$, woraus sich eine Periode von f als $a = n_1a_1 = 2\pi$ ergibt.
Um zu zeigen, dass 2π die kleinste Periode von f ist, schreiben wir mithilfe von Satz 4.28.6

$$f(x) = 2g_1(x)g_2(x) \quad \text{mit} \quad g_1(x) := \sin\big(\frac{3x}{2}\big),\ \ g_2(x) := \cos\big(\frac{7x}{2}\big)$$

und betrachten zuerst die Nullstellen von g_1, welche im Interval $(0, 2\pi)$ gegeben sind durch $x_{0,n} = 2n\pi/3, \quad n = 1, 2$. Hätte f die Periode $x_{0,n}$, dann müsste gelten

$$0 = 2\sin\big(\frac{3\pi}{2\cdot 7}\big)\cos\big(\frac{7\pi}{2\cdot 7}\big) = f\big(\frac{\pi}{7}\big) = f\big(\frac{\pi}{7} + x_{0,n}\big) = f\big(\frac{3+14n}{3\cdot 7}\pi\big)$$

für $n = 1, 2$. Da aber weder g_1 noch g_2 eine Nullstelle bei

$$\frac{17}{21}\pi \quad \text{oder} \quad \frac{31}{21}\pi$$

besitzen, führt dieses auf einen Widerspruch. Analog betrachten wir die Nullstellen von g_2 im Interval $[0, 2\pi)$, gegeben durch $y_{0,k} = (2k+1)\pi/7$, $k = 1, 2, \ldots, 6$. Hätte f die Periode $y_{0,k}$, dann müsste gelten

$$0 = f\big(x_{0,n}\big) = f\big(x_{0,n} + y_{0,k}\big) = f\big(\frac{14n + 6k + 3}{3\cdot 7}\pi\big),$$

was aber auch zu einen Widerspruch führt, da keiner der Werte

$$\frac{14n + 6k + 3}{3\cdot 7}\pi,\ n = 1, 2,\ k = 1, 2, \ldots, 6$$

d.h.,

$$\frac{23}{21}\pi, \frac{29}{21}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{37}{21}\pi, \frac{41}{21}\pi, \frac{43}{21}\pi, \frac{47}{21}\pi, \frac{7}{3}\pi, \frac{53}{21}\pi, \frac{55}{21}\pi, \frac{61}{21}\pi, \frac{67}{21}\pi$$

zu einer Nullstelle von g_1 oder g_2 gehört.

13.3 (6 Punkte) Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \frac{2}{1+2x^2}.$$

Der Vergleich mit der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

liefert $q = -2x^2$, so dass

$$f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-2x^2)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{2n} = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit

$$a_n := \begin{cases} (-2)^{n/2}, & \text{falls} \quad n \text{ gerade} \\ \quad 0 \quad , & \text{falls} \quad n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für den Konvergenzradius dieser Potenzreihe erhalten wir

$$r^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sup\{\sqrt[k]{2^{k/2}} \mid k \geq n, k \text{ gerade}\} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Damit ist der Konvergenzradius $r = 1/\sqrt{2}$, und somit ist der Konvergenzbereich der Reihe für f kleiner als der Definitionsbereich von f.

13.4 (6 Punkte für Teil (i)) (i) Sei $x > 0$, dann ist $f(x) = \sin|x| = \sin x$ differenzierbar (siehe Beispiel 5.3.3); das Gleiche gilt für $x < 0$, da dann $f(x) = \sin|x| = \sin(-x) = -\sin x$ ist. Für den Punkt $x_0 = 0$ erhalten wir einerseits

$$\lim_{x\downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin|x| - \sin|0|}{x - 0} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

wobei wir den limes $x \downarrow 0$ für die Schranken aus 4.30, d.h., $x^{-1}(x - x^3/6) < x^{-1}\sin(x), x^{-1} < x$ (wie in Teil (b) der Aufgabe 13.1) benutzt haben. Für $x < 0$ ist

$$\frac{\sin|x| - \sin|0|}{x - 0} = \frac{\sin|x|}{-|x|} = -\frac{\sin|x|}{|x|}$$

und damit

$$\lim_{x\uparrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\uparrow 0}\frac{\sin|x|-\sin|0|}{x-0}=\lim_{x\uparrow 0}-\frac{\sin|x|}{|x|}=-\lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin x}{x}=-1.$$

Rechts- und linksseitiger Limes des Differenzenquotienten von f an der Stelle $x_0 = 0$ sind offensichtlich verschieden, so dass f bei x_0 nicht differenzierbar ist.

(ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, welche $f(0) = a$ mit $a < 0$ und $f'(x) = x\big(f(x)\big)^2$ erfüllt. Aus dieser Bedingung folgt $f'(x) \leq 0$ für $x < 0$, und $f'(x) \geq 0$ für $x > 0$, während $f'(0) = 0$ sein muss. Somit ist f monoton abfallend für $x < 0$ und monoton ansteigend für $x > 0$, so dass der tiefste Wert von f bei $x = 0$ angenommen wird. Da nach Voraussetzung $f(0) = a$ ist, muss $f(x) \geq a$ sein. Wäre $f(x) = a$ für alle x in einer Umgebung von $x_0 = 0$, dann müsste für diese x die Ableitung $f'(x)$ verschwinden, was aber obiger Bedingung widerspricht. Somit muss $f(x) > a$ für alle $x \neq 0$ gelten. (Bemerkung: Die Lösung der obigen Bedingung (d.h., Differentialgleichung $f'(x) = x\big(f(x)\big)^2$ mit $f(0) = a$) ist durch

$$f(x)=\frac{2a}{2-ax^2}$$

gegeben.)