Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielaufgaben für Tutorien, Woche 12

T11.1 Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von reellen Zahlen. Zeigen Sie:

(i) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, $\lim_{n\to\infty} = a$, dann gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$.

(ii) Es gilt die Ungleichung

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

T11.2 Bestimmen Sie $\limsup_{n\to\infty} a_n$ für die unten definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(i) $a_n := (-1)^n + \dfrac{a}{n} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$

(ii) $a_n := \dfrac{(-1)^{3n}}{2} + \dfrac{n+1}{2n}$

(iii) $a_n := n(-1)^n + \dfrac{n^2}{n+1}$

T11.3 Untersuchen Sie die folgenden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz:

(i) $a_n := \dfrac{(-1)^{n(n+1)/2}}{(n+1)^2}$

(ii) $a_n := \dfrac{(-1)^n}{n^3}$

(iii) $a_n := \dfrac{(-2)^n n}{3^n}$

(iv) $a_n := \left(\dfrac{4n+2}{5n+1}\right)^n$

T11.4 Betrachtet werde die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n, x \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius, wenn $a_n := \dfrac{2^n\, n}{n+1}$ ist.

(ii) Untersuchen Sie, für welche reelle x die Potenzreihe konvergent ist, falls wir $a_n := \dfrac{1}{n+1}$ setzen.

(iii) Angenommen, die Potenzreihe konvergiert für alle (komplexen) x mit $|x| < \rho$ für ein $\rho > 0$. Für welche x konvergiert dann die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, wobei $b_n := a_n\, c^n$ für ein gegebenes $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei?