Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Online am:
24. 01. 2017

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielslösungen, Woche 12

12.1 (6 Punkte) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und es gelte $a := \limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Unser Ziel ist, eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu konstruieren, welche $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ erfüllt. Dazu setzen wir $s_n := \sup\{a_k \,|\, k > n\} \geq \limsup_{n\to\infty} a_n$.
Zuerst betrachten wir den Fall, dass $s_n > \limsup_{n\to\infty} a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann existiert ein Folgenglied a_m, welches $\limsup_{n\to\infty} a_n < a_m < s_1$ erfüllt (falls es ein solches Folgenglied nicht gäbe, müsste $s_1 \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$ sein). Wir nehmen dieses a_m als erstes Folgenglied, $n_1 := m$, für die zu konstruierende Teilfolge. Da $s_n \to \limsup_{n\to\infty} a_n$ für $n \to \infty$, gibt es ein $\tilde{n}_1 > n_1$ mit $\limsup_{n\to\infty} a_n < s_{\tilde{n}_1} < a_{n_1}$. Für $s_{\tilde{n}_1}$ gibt es wiederum ein Folgenglied $a_{m'}$ mit $m' > \tilde{n}_1$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n < a_{m'} < s_{\tilde{n}_1}$, so dass wir dieses a_m als nächstes Glied der Teilfolge nehmen können, $n_2 := m'$. Iterativ fortfahrend erhalten wir auf diese Weise eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\limsup_{n\to\infty} a_n < a_{n_k} < s_{\tilde{n}_k}$, woraus

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} s_{\tilde{n}_k} = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

und damit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} a_n$ folgt.
Im Falle dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, für welches $s_N = \limsup_{n\to\infty} a_n$ (und damit auch $s_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ für alle $n \geq N$) gilt, nehmen wir als erstes Teilfolgenglied $a_{n_1} := a_N$. Für $k > 1$ wählen wir als Teilfolgenglied $a_{n_k} := a_m$ ein jeweiliges Folgenglied a_m welches $m > k$ und

$$\limsup_{n\to\infty} a_n - \frac{1}{k} < a_m \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

erfüllt (solche a_m gibt es, da für jedes $\epsilon > 0$ für unendlich viele Folgenglieder a_j gilt: $\sup\{a_k \,|\, k \geq n\} - \epsilon < a_j \leq \sup\{a_k \,|\, k \geq n\}$). Da $1/k \to 0$ für $k \to \infty$, erhalten für diese Teilfolge die Konvergenz $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

12.2 (6 Punkte) Betrachtet werde die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Es gebe ein $r > 0$ so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ für alle $|x| \leq r$ gelte.
Sei $m := \min\{n \in \mathbb{N}_0 \,|\, a_n \neq 0\}$ (falls es ein solches m nicht gibt, verschwinden bereits alle a_n). Im Falle dass $m > 0$ ist, können wir die Reihe faktorisieren, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} x^n$, und in der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} x^n$ durch Umbennung der Koeffizienten diese auf den Fall $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_0 \neq 0$ zurückführen.
Da die Reihe für $x = r$ konvergiert, muss die Folge $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und damit beschränkt sein. Somit gilt $c_r := \sup\{a_n r^n \,|\, n \in \mathbb{N}_0\} < \infty$. Für alle $|x| < \min\{|a_0| r/2, r/2\}$ können wir abschätzen

$$|a_0| = |\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n r^n| |\frac{x}{r}|^n \leq c_r \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{x}{r}|^n = c_r \frac{|x|}{r - |x|} < |a_0|,$$

was einen Widerspruch darstellt, so dass $a_0 = 0$ sein muss. Folglich existiert kein $m = \min\{n \in \mathbb{N}_0 \,|\, a_n \neq 0\}$, d.h., $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

12.3 (6 Punkte) (a) Wir berechnen die folgenden Grenzwerte.

(i) Durch Umformung ergibt sich

$$\frac{(\sqrt{x}+\mathrm{i})(\sqrt{x}-\mathrm{i})-2}{\sqrt{|x-1|}} = \frac{x-1}{\sqrt{|x-1|}} = \begin{cases} \sqrt{|x-1|}\,, & \text{falls} \quad x > 1 \\ -\sqrt{|x-1|}, & \text{falls} \quad x < 1. \end{cases}$$

Da $\lim_{x\to 1} \pm\sqrt{|x-1|} = 0$ ist, folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}+\mathrm{i})(\sqrt{x}-\mathrm{i})-2}{\sqrt{|x-1|}} \;=\; 0.$$

(ii) Hier benutzen wir die Faktorisierung $x^k - 1 = x^k - x^{k-1} + x^{k-1} + \ldots + x^1 - 1 = (x-1)x^{k-1} + (x-1)x^{k-2} + \ldots + (x-1) = (x-1)\sum_{j=0}^{k-1} x^j$ für $k \in \mathbb{N}$. Damit wird

$$\frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{(x-1)\sum_{j=0}^{m-1} x^j}{(x-1)\sum_{j=0}^{n-1} x^j} = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} x^j}{\sum_{j=0}^{n-1} x^j}$$

und

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sum_{j=0}^{m-1} x^j}{\sum_{j=0}^{n-1} x^j} = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} 1^j}{\sum_{j=0}^{n-1} 1^j} = \frac{m}{n}.$$

Alternativ kann man auch $x = t - 1$ setzen, den Binomialsatz verwenden, und dann den Limes $t \to 0$ berechnen.

(iii) Da $e^x = \exp(x) = 1 + x + x^2/2 + \sum_{n=3}^{\infty} x^n/n!$ ist, folgt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}(1 - e^x + x)x^{-2} &= \lim_{x\to 0}\Big(1 + x - \Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\Big)\Big)x^{-2} \\ &= -\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n!}\Big) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(b) Es sei $\sin(\pi/6) = 1/2$ gegeben. Hieraus und aus den allgemeinen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen lassen sich die Werte wie folgt bestimmen:

(i) Da $\cos(x) \geq 0$ für $x \in [0, \pi/2]$ ist, müssen wir die positive Wurzel nehmen: $\cos(\pi/6) = \sqrt{1 - \sin^2(\pi/6)} = \sqrt{1 - (1/2)^2} = \sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2$

(ii) $\sin(\pi/3) = \sin\big(2(\pi/6)\big) = \sin(\pi/6)\cos(\pi/6) + \cos(\pi/6)\sin(\pi/6) = 2\sin(\pi/6)\cos(\pi/6) = 2(1/2)\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/2$

(iii) Wie in (i) mit der positive Wurzel: $\cos(\pi/3) = \sqrt{1 - \sin^2(\pi/3)} = \sqrt{1 - (\sqrt{3}/2)^2} = \sqrt{1/4} = 1/2$

12.4 (6 Punkte) Sei $r_a > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wir untersuchen das Konvergenzverhalten und den Konvergenzradius r_b der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ mit

(i) $b_n := \sqrt{|a_n|}$. Da die Wurzelabbildung $\sqrt{\cdot} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine strikt monotone Funktion ist, und somit $\sup\{\sqrt[k]{|a_k|^{1/2}} \mid k \geq n\} = \sup\{|a_k|^{1/(2k)} \mid k \geq n\} = \sqrt{\sup\{|a_k|^{1/k} \mid k \geq n\}}$ ist, erhalten wir unter Benutzung der Stetigkeit der Wurzelabbildung

$$\begin{aligned} r_b^{-1} &= \lim_{n\to\infty} \sup\{\sqrt[k]{|a_k|^{1/2}} \mid k \geq n\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sup\{|a_k|^{1/k} \mid k \geq n\}} \\ &= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \sup\{|a_k|^{1/k} \mid k \geq n\}} = (\sqrt{r_a})^{-1}, \end{aligned}$$

so dass $r_b = \sqrt{r_a}$ ist.

(ii) $b_n := \mathrm{i}\, a_n^2$. Da auch das Quadrieren eine strikt monotone und stetige Abbildung und $|\mathrm{i}a_n| = |a_n|$ ist, können wir analog wie im Teil (i) verfahren, mit $\sup\{\sqrt[k]{|a_k|^2} \mid k \geq n\} = \sup\{\big(\sqrt[k]{|a_k|}\big)^2 \mid k \geq n\} = \big(\sup\{\sqrt[k]{|a_k|} \mid k \geq n\}\big)^2$, so dass

$$\begin{aligned} r_b^{-1} &= \lim_{n\to\infty} \sup\{\sqrt[k]{|\mathrm{i}a_k|^2} \mid k \geq n\} \\ &= \big(\lim_{n\to\infty} \sup\{\sqrt[k]{|a_k|} \mid k \geq n\}\big)^2 = r_a^{-2} \end{aligned}$$

(iii) $b_n := a_n$ mit $y(x) := ax^m$; hier sei $a \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}$, und nun werde x als unabhängige Variable in $\sum_{n=0}^{\infty} b_n y(x)^n$ betrachtet. Damit nimmt die Reihe die Form an $\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n x^{mn} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, wobei

$$c_k := \begin{cases} a_{k/m} a^{k/m}, & \text{falls} \quad k/m \in \mathbb{N} \\ 0 \quad , & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit bestimmt sich der Konvergenzradius dieser Potenzreihe zu

$$\begin{aligned} r_b &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup\{\sqrt[k]{|c_k|} \mid k \geq n\}} \\ &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup\{\sqrt[k]{|a_{n/m} a^{k/m}|} \mid k \geq n \wedge k/m \in \mathbb{N}\}} \\ &= \frac{1}{|a|^{1/m} \lim_{n\to\infty} \sup\{\sqrt[k]{|a_{k/m}|} \mid k \geq n \wedge k/m \in \mathbb{N}\}} \\ &= \frac{1}{|a|^{1/m} \lim_{n\to\infty} \sup\{\sqrt[jm]{|a_j|} \mid jm \geq n \wedge j \in \mathbb{N}\}} \\ &= \frac{1}{|a|^{1/m} \big(\lim_{\ell\to\infty} \sup\{\sqrt[j]{|a_j|} \mid j \geq \ell \wedge j \in \mathbb{N}\}\big)^{1/m}} = \Big(\frac{r_a}{|a|}\Big)^{1/m}. \end{aligned}$$