Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Abgabetermin:
24. 01. 2017 bis 10:30

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Übungsaufgaben, Woche 12

12.1 (6 Punkte) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und es gelte $a := \limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, welche $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ erfüllt.

12.2 (6 Punkte) Betrachtet werde die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Es gebe ein $r > 0$ so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ für alle $|x| \leq r$ gelte. Beweisen Sie, dass daraus $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgt.

12.3 (6 Punkte) (a) Bestimmen Sie die folgenden (gegebenenfalls komplexen) Grenzwerte.

(i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x}+\mathrm{i})(\sqrt{x}-\mathrm{i})-2}{\sqrt{|x-1|}}$ mit $x \in \mathbb{R}$

(ii) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$

(iii) $\lim_{x\to 0}(1 - e^x + x)x^{-2}$

(b) Es sei $\sin(\pi/6) = 1/2$ gegeben. Bestimmen Sie daraus und den allgemeinen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen die Werte von:
(i) $\cos(\pi/6)$; (ii) $\sin(\pi/3)$; (iii) $\cos(\pi/3)$.

12.4 (6 Punkte) Sei $r > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Überprüfen Sie das Konvergenzverhalten und den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$, wobei gesetzt werde:

(i) $b_n := \sqrt{|a_n|}$

(ii) $b_n := \mathrm{i}\, a_n^2$

(iii) $b_n := a_n$ mit $y(x) := ax^m$; hier sei $a \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}$, und nun werde x als unabhängige Variable in $\sum_{n=0}^{\infty} b_n y(x)^n$ betrachtet.

Für alle Aufgaben gilt: Begründen Sie jeden Schritt in Ihren Lösungen!

Abgabe in den entsprechenden und gekennzeichneten Abgabekästen im ersten Stock des Mathematischen Institutes (in der Nähe des Bibliothekeingangs).