Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Besperechungstermin:
09.01. bis 13. 01. 2017

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker
Beispielaufgaben für Tutorien, Woche 11

T10.1 Für eine Funktion $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ mit $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ gebe es an der Stelle $x_0 \in \mathcal{D}$ positive Zahlen $c_0, R_0 \in \mathbb{R}$ so dass für alle $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| \leq R_0$ und $x_0 + h \in \mathcal{D}$ und für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq c_0 |h|^n.$$

Beweisen Sie, dass dann f stetig im Punkt x_0 ist.

T10.2 Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob

(i) f stetig bei $x_0 = 0$ ist;

(ii) es eine Umgebung von $x_0 = 0$ gibt, in welcher f gleichmässig stetig ist;

(iii) es eine Umgebung von $x_0 = 0$ gibt, in welcher f Lipschitz stetig ist.

T10.3 Sei $a < b$ und $\mathcal{D} := [a, b] \subset \mathbb{R}$. Auf diesem Interval $\mathcal{D}$ sei die Funktion $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f(a) \leq f(b)$. Angenommen, es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ so dass $f(c) \leq f(a)$ gilt. Zeigen Sie, dass f dann nicht injektiv sein kann.

T10.4 Für $x > 0$ werde die Gleichung

$$x^{-17} - 2x^3 + 19x^2 + 6x = 12$$

betrachtet. Zeigen Sie, dass es mindestens ein $x > 0$ gibt, welches diese Gleichung erfüllt.