Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Online am:
17. 01. 2017

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielslösungen, Woche 11

11.1 Für $n \in \mathbb{N}$ seien die reellen Funktion $f_n : [0,1] \to [0,1]$ durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 2k\big((1-2k)x+1\big), & \text{falls} \quad \frac{1}{2k} < x \leq \frac{1}{2k-1} \\ 2k\big((1+2k)x-1\big), & \text{falls} \quad \frac{1}{2k+1} < x \leq \frac{1}{2k} \\ 0 \qquad , & \text{falls} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2n+1}, \end{cases}$$

definiert, wobei $k = 1, \dots n$ durchläuft.

(i) Ein Beispiel für eine dieser Funktionen (d.h., für f_4) ist in Bild 1 dar-

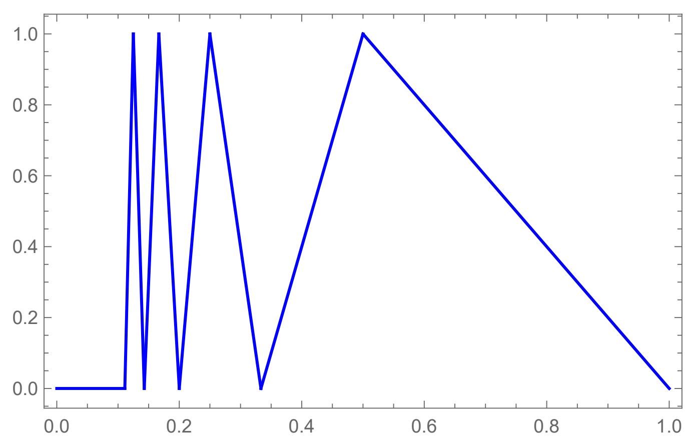

Bild 1. Die Funktion f_4.

gestellt. Wir setzen $I_{2k} := (\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1}]$ und $I_{2k+1} := (\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}]$ sowie

$$M_n := \bigcup_{k=1}^{n} I_{2k} \cup \bigcup_{k=1}^{n} I_{2k+1}$$

Dann gilt $f_n = 0$, wenn $x \in [0,1] \setminus M_n$ ist. Des Weiteren setzen wir für $k = 1, 2, \ldots, \infty$

$$f_\infty(x) := \begin{cases} 2k\big((1-2k)x+1\big), & \text{falls} \quad \frac{1}{2k} < x \leq \frac{1}{2k-1} \\ 2k\big((1+2k)x-1\big), & \text{falls} \quad \frac{1}{2k+1} < x \leq \frac{1}{2k} \\ \qquad 0 & , \quad \text{falls} \quad x = 0. \end{cases}$$

Für die Differenzen ergibt sich damit

$$|f_\infty(x) - f_n(x)| = 0 \quad \text{falls} \quad x \in M_n$$

und

$$|f_\infty(0) - f_n(0)| = 0.$$

Nun gibt es für jedes $x \in [0,1]$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $x \in M_n$. Daraus folgt, dass für dieses x und jedes $\epsilon > 0$ und $n \geq N$ die Ungleichung

$$|f_\infty(x) - f_n(x)| = 0 < \epsilon$$

erfüllt ist. Somit konvergiert die Folge der f_n punktweise gegen f_∞.

Da

$$f_\infty\big(\frac{1}{2k}\big) = 2k\big(\frac{1+2k}{2k} - 1\big) = 1$$

und damit

$$\big|f_\infty\big(\frac{1}{2k}\big) - f_n\big(\frac{1}{2k}\big)\big| = |1-0| = 1$$

für alle $k > n$ gilt, kann diese Differenz nicht kleiner als ϵ für hinreichend kleine ϵ werden, so dass die f_n nicht gleichmässig gegen f_∞ konvergieren.

(ii) Betrachtet werde die Nullfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k := 1/(2k)$. Wie oben bereits berechnet, gilt $f_\infty(a_k) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, während $f_\infty(0) = 0$ ist. Somit sind die Grenzwerte $\lim_{k\to\infty} f_\infty(a_k) = \lim_{k\to\infty} 1 = 1$ und $f_\infty(\lim_{k\to\infty} a_k) = f_\infty(0) = 0$ ungleich; der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f_\infty(x)$ existiert also nicht und damit ist f_∞ nicht stetig bei $x_0 = 0$.

(iii) Da $f_\infty\big([0,1]\big) = [0,1]$ gilt, ist die Menge der Häufungspunkte der Menge $\{f_\infty(x) \,|\, x \in [0,1]\}$ gleich $[0,1]$.

11.2 Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge von Funktionen $f_n : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := x^{-n}$.

(i) Wir formen um,

$$\begin{aligned} x^{-n} - x_0^{-n} &= x^{-n} - x^{-n+1}x_0^{-1} + x^{-n+1}x_0^{-1} - x^{-n+2}x_0^{-2} + x^{-n+2}x_0^{-2} \\ &\quad + \ldots + x^{-1}x_0^{-n+1} - x_0^{-n} \\ &= (x^{-1} - x_0^{-1})x^{-n+1} + (x^{-1} - x_0^{-1})x^{-n+2}x_0^{-1} + (x^{-1} \\ &\quad -x_0^{-1})x^{-n+3}x_0^{-2} + \ldots + (x^{-1} - x_0^{-1})x_0^{-n+1} \\ &= (x^{-1} - x_0^{-1}) \sum_{k=0}^{n-1} x^{k-(n-1)} x_0^{-k}, \end{aligned}$$

woraus die Abschätzung folgt

$$|x^{-n} - x_0^{-n}| = |x^{-1} - x_0^{-1}| \, \Big| \sum_{k=0}^{n-1} x^{k-n+1} x_0^{-k} \Big| \le n |x^{-1} - x_0^{-1}|,$$

da $x^{-k} \le 1$ und $x_0^{-k} \le 1$ für $x, x_0 \ge 1$ gilt. Ähnlich erhalten wir die Ungleichung für $x \ne x_0, \quad x, x_0 \ge 1$

$$\begin{aligned} |x^{-1} - x_0^{-1}| &= |x^{-1} - x_0^{-1}| \frac{|x - x_0|}{|x - x_0|} \\ &= \frac{|x - x_0|}{x x_0} \\ &\le |x - x_0|. \end{aligned}$$

Somit folgt die Lipschitz Stetigkeit

$$|x^{-n} - x_0^{-n}| \le n|x - x_0|$$

der Funktionen f_n auf $[1,\infty)$, welche die Stetigkeit und die gleichmässige Stetigkeit impliziert.

(ii) Falls $x > 1$ ist, dann gilt $x^{-1} < 1$ und somit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^{-n} = 0$, während für $x = 1$ die Funktionen $f_n(1) = 1$ und damit $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$ erfüllen. Somit erhalten wir $\lim_{n\to\infty} f_n = f_\infty$ mit der Grenzfunktion

$$f_\infty(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x = 1 \\ 0, & \text{falls} \quad x > 1. \end{cases}$$

Die Funktion f_∞ ist unstetig bei $x_0 = 1$ und Lipschitz stetig auf $[a,\infty)$ für alle $a > 1$. Die Konvergenz der f_n ist nicht gleichmässig, da (wegen der gleichmässigen Stetigkeit der f_n) andernfalls f_∞ stetig sein müsste.

11.3 Sei $\mathcal{D} := [0,1]$.

(i) Die Funktion $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ nehme auf allen rationalen Zahlen aus $\mathcal{D}$ den Wert $c_0 \in \mathbb{C}$ an, während sie ansonsten gleich $c_1 \in \mathbb{C}$ sei, d.h.,

$$f(x) := \begin{cases} c_0, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{Q} \\ c_1, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sei f stetig auf $\mathcal{D}$. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $x_n \in \mathbb{Q}$ mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Wegen der Stetigkeit ist dann $c_1 = f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} c_0 = c_0$. Umgekehrt, falls $c_1 = c_0$ gilt, dann ist f konstant und damit stetig.

(ii) Angenommen, f sei eine stetige Funktion, welche das Intervall $[0,1]$ surjektiv auf das halboffene Intervall $[0,1)$ abbildet. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen $y_n \in [0,1)$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$. Wegen der Surjektivität gibt es zu jedem y_n ein Element $x_n \in [0,1]$ mit $f(x_n) = y_n$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine beschränkte Folge und besitzt nach dem Satz 2.65 einen Häufungspunkt $x_\infty \in [0,1]$. Somit existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_\infty$. Während $f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(x_\infty) \in [0,1)$ sein muss, gilt für den Grenzwert der Bilder der Teilfolge $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = 1$, was wegen der Stetigkeit einen Widerspruch darstellt.

11.4 Das Konvergenzverhalten in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ der folgenden Reihen ergibt sich aus:

(i) Anwendung des Wurzelkriteriums mit $\sqrt[n]{a^n(1+1/n)^n} = a(1+1/n) \to a$ für $n \to \infty$. Folglich konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für alle $0 \leq a < 1$.

(ii) Anwendung des Quotientenkriteriums mit

$$\frac{a^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \frac{\sqrt{n!}}{a^n} = \frac{a}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

für $n \to \infty$. Daher konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}$ für alle $a > 0$.