Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Abgabetermin:
17. 01. 2017 bis 10:30

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Übungsaufgaben, Woche 11

Erinnerung: Bitte ab sofort Einzelabgabe!

11.1 (6 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}$ seien die reellen Funktion $f_n : [0,1] \to [0,1]$ durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 2k\big((1-2k)x+1\big), & \text{falls} \quad \frac{1}{2k} < x \leq \frac{1}{2k-1} \\ 2k\big((1+2k)x-1\big), & \text{falls} \quad \frac{1}{2k+1} < x \leq \frac{1}{2k} \\ \quad 0 \quad , & \text{falls} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2n+1}, \end{cases}$$

definiert, wobei $k = 1, \ldots n$ durchläuft.

(i) Zeigen Sie, dass für $n \to \infty$ die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion f_∞ konvergiert. Ist die Konvergenz gleichmäßig?.

(ii) Überprüfen Sie, ob f_∞ stetig bei $x_0 = 0$ ist.

(iii) Bestimmen Sie die Menge der Häufungspunkte der Menge $\{f_\infty(x) \,|\, x \in [0,1]\}$.

11.2 (6 Punkte) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge von Funktionen $f_n : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := x^{-n}$.

(i) Überprüfen Sie, ob die f_n stetig, gleichmässig stetig, oder Lipschitz stetig auf $[1,\infty)$ sind.

(ii) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Grenzfunktion f_∞? Falls ja, untersuchen Sie die Konvergenz auf Gleichmässigkeit und bestimmen Sie f_∞ und die Stetigkeitseigenschaften von f_∞ (ist f_∞ (gleichmässig, Lipschitz) stetig?).

11.3 (6 Punkte) Sei $\mathcal{D} := [0,1]$.

(i) Die Funktion $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ nehme auf allen rationalen Zahlen aus $\mathcal{D}$ den Wert $c_0 \in \mathbb{C}$ an, während sie ansonsten gleich $c_1 \in \mathbb{C}$ sei, d.h.,

$$f(x) := \begin{cases} c_0, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{Q} \\ c_1, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass die Stetigkeit von f auf $\mathcal{D}$ äquivalent zur Gleichheit $c_0 = c_1$ ist.

(ii) Konstruieren Sie eine stetige Funktion $f : \mathcal{D} \to [0,1)$ (oder zeigen Sie, dass es ein solches f nicht geben kann), welche D surjektiv auf das halboffene Interval $[0,1)$ abbildet.

11.4 (6 Punkte) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ der folgenden Reihen:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}$

Für alle Aufgaben gilt: Begründen Sie jeden Schritt in Ihren Lösungen!

Abgabe in den entsprechenden und gekennzeichneten Abgabekästen im ersten Stock des Mathematischen Institutes (in der Nähe des Bibliothekeingangs).