Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Online am:
10. 01. 2017

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielslösungen, Woche 10

10.1 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $c_0 \in \mathbb{R}$.

(i) Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$

$$|f(a_n) - c_0| < \epsilon$$

gilt. Aufgrund der Ungleichung $\big|\, |f(x)| - |c_0| \,\big| \leq |f(x) - c_0|$ (vgl. T5.1) gilt damit auch

$$\big||f(a_n)| - |c_0|\big| < \epsilon,$$

welches besagt, dass $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |c_0|$ ist.

(ii) Falls $c_0 = 0$ ist, können wir Gebrauch davon machen (vgl. Teil (i) der Aufgabe 9.3), dass $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Nullfolge ist, wenn $\big(|f(a_n)|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, um aus $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$ die Konvergenz $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ zu folgern.
Falls $c_0 \neq 0$ ist, erhalten wir ein Gegenbeispiel, indem wir die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} c_0, & x \geq 0 \\ -c_0, & x < 0. \end{cases}$$

betrachten. Dann ist $|f(x)| = c_0$ konstant und daher stetig, während f eine Unstetigkeitsstelle bei $x = 0$ aufweist (siehe auch Beispiel 3.29).

10.2 Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Es sei $\mathcal{D} := (-1, 1)$ und $x \in \mathcal{D}$. Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv durch $a_0 := x$ und $a_{n+1} = a_n^4$ für $n \geq 0$. Dann gilt für $n \geq 1$

$a_n = x^{4^n}$ welches als Teilfolge der geometrischen Folge mit $|q| < 1$ gegen Null konvergiert,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Nach Voraussetzung gilt auch $f(a_n) = f(a_{n-1}) = \ldots = f(a_0) = f(x)$. Somit erhalten wir im Limes $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x)$, während andererseits wegen der Stetigkeit von f bei $x_0 = 0$ wir die Limesbildung innerhalb der Funktion vornehmen können, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(0)$. Zusammen ergibt sich daraus, dass $f(x) = f(0)$ für alle $x \in \mathcal{D}$ gelten muss.

(ii) Jetzt sei $\mathcal{D} := \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, und die Funktion f sei gegeben durch

$$f(x) := \frac{x^2 + 3x - 6 - 8/x}{6x - 12} = \frac{1}{2} + \frac{x^2 - 8/x}{6x - 12}.$$

Wegen des Terms $1/x$ im Zähler gilt $f(x) \to -\infty$ für $x \uparrow 0$ und $f(x) \to \infty$ für $x \downarrow 0$. Somit kann f nicht stetig auf $x_0 = 0$ fortgesetzt werden. Um das Verhalten von f für $x \to 2$ zu untersuchen, setzen wir $x := 2+t$. Dann erhalten wir nach Umformung

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{t\to 0} f(2+t) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{(2+t)^3 - 8}{6t(t+2)}\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{t^2 + 6t + 12}{6t + 12}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{t\to 0} \left(\frac{t^2}{6t + 12} + 1\right) = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Wenn wir also $f(2) := 3/2$ setzen, erhalten wir somit eine Fortsetzung der Funktion f, welche auf den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ stetig ist.

10.3 Für $a \in \mathbb{R}$ seien die Teilmengen $M_a := \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \,|\, y + ax = 0\}$ und $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ von $\mathbb{C}$ gegeben.

(i) Die Bedingung in M_a bestimmt eine Gerade in der komplexen Ebene, welche durch die Null geht und deren Imaginärteil die Steigung a besitzt, während S^1 der Kreis mit dem Radius 1 und Mittelpunkt 0 ist. Die für jedes $a \in \mathbb{R}$ jeweils möglichen zwei Schnittpunkte der Gerade mit dem Kreis ergeben sich, wenn man die Bedingung $y = -ax$ in die Kreisgleichung $|z|^2 = z\overline{z} = x^2 + y^2 = 1$ einsetzt zu

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}, \qquad y = \mp\frac{a}{\sqrt{a^2+1}},$$

wobei das $+$ in x dem $-$ im y und das $-$ in x dem $+$ im y jeweils entsprechen. Somit ist

$$M_a \cap S^1 = \{z = x + \mathrm{i}y \,|\, x = \pm(a^2+1)^{-1/2},\, y = \mp a(a^2+1)^{-1/2}\}.$$

Ein Vergleich der Form

$$\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \mp \mathrm{i}\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

von Elementen aus $M_a \cap S^1$ mit dem gewünschten

$$\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

zeigt dann unmittelbar, dass durch die Wahl $a := -\sqrt{3}$ der gegebene Schnittpunkt bestimmt wird,

$$\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \;\in\; M_{-\sqrt{3}} \cap S^1.$$

(ii) Für $w \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ gilt

$$\left|\frac{w-\mathrm{i}}{\overline{w}+\mathrm{i}}\right| = \sqrt{\frac{(w-\mathrm{i})(\overline{w}+\mathrm{i})}{(\overline{w}+\mathrm{i})(w-\mathrm{i})}} = 1,$$

während z auf dem Einheitskreis liegt, also $|z| = 1$ ist. Damit folgt (unter Verwendung von Satz 2.82.2)

$$\left|\frac{w-\mathrm{i}}{\overline{w}+\mathrm{i}} \cdot z\right| = \left|\frac{w-\mathrm{i}}{\overline{w}+\mathrm{i}}\right| \cdot |z| = 1$$

und damit

$$\sup\left\{\left|\frac{w-\mathrm{i}}{\overline{w}+\mathrm{i}} \cdot z\right| \,\middle|\, \overline{w} \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\},\, z \in M_a \cap S^1\right\} = 1.$$

10.4 Die Menge $M_\mathrm{s} \subset \mathbb{C}$ werde durch

$$M_\mathrm{s} := \{ z = x + \mathrm{i}y \mid |y| \leq 1 - \frac{|x|}{3} \;\vee\; |x| \leq 1 - \frac{|y|}{3} \}$$

definiert.

(i) Die Bedingungen in M_s beschreiben ein Gebiet, welches durch Segmente von Geraden (welche die eine Achse bei ± 1, die andere Achse bei ± 3 schneiden) begrenzt wird. Dieses führt auf die in Bild 1 gezeigte Darstellung von M_s in der komplexen Ebene.

(ii) Durch die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) := \frac{2(1+\mathrm{i})}{3}\, z$$

wird jedes $z \in \mathbb{C}$ um den Winkel $\pi/4$ (entspricht 45 Grad) entgegen dem Uhrzeigersinn gedreht und um den Faktor $2\sqrt{2}/3$ gestaucht (wie man beispielsweise für $z := 1 + 0\,\mathrm{i}$ leicht sehen kann). Oder, ausgedrückt durch Bedingungen an $z = x + \mathrm{i}y$:

$$\begin{aligned} w \in f(M_\mathrm{s}) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{3w}{2(1+\mathrm{i})} \in M_\mathrm{s} \\ &\Leftrightarrow \quad \Big|\mathrm{Im}\frac{3w}{2(1+\mathrm{i})}\Big| \leq 1 - \frac{1}{3}\Big|\mathrm{Re}\frac{3w}{2(1+\mathrm{i})}\Big| \\ &\qquad \vee\; \Big|\mathrm{Re}\frac{3w}{2(1+\mathrm{i})}\Big| \leq 1 - \frac{1}{3}\Big|\mathrm{Im}\frac{3w}{2(1+\mathrm{i})}\Big|. \end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich die Bildmenge $f(M_\mathrm{s})$ wie im Bild 2 gezeigt.

Kombiniert mit Bild 1 erhält man schliesslich die im Bild 3 dargestellte Gestalt.

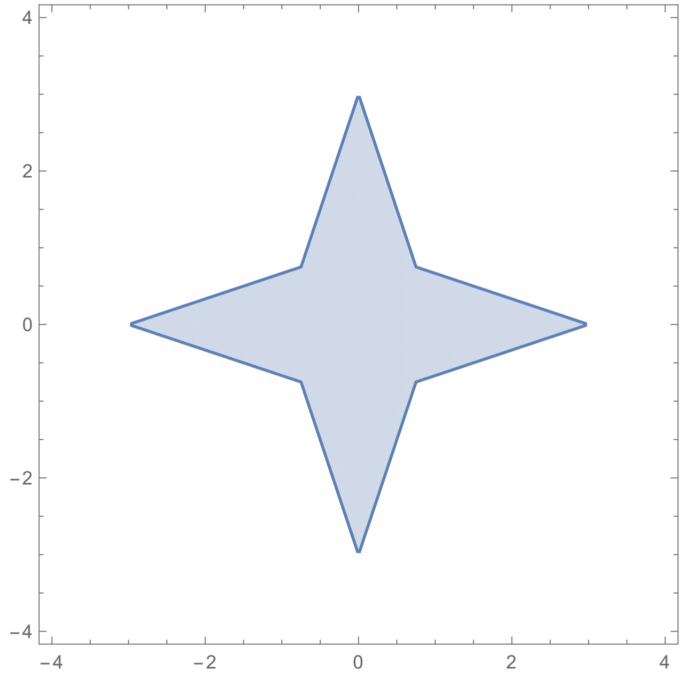

Bild 1. Die Menge $M_{\mathrm{s}} \subset \mathbb{C}$.

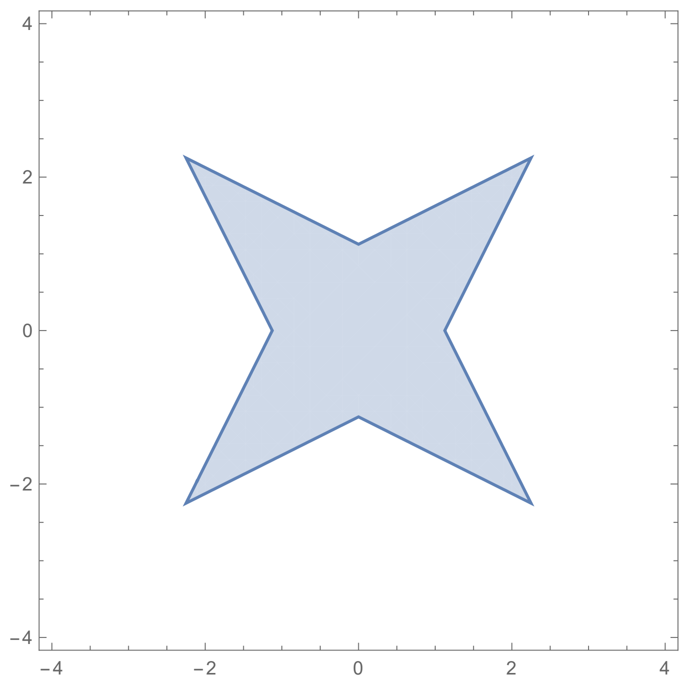

Bild 2. Die Menge $f(M_{\mathrm{s}}) \subset \mathbb{C}$.

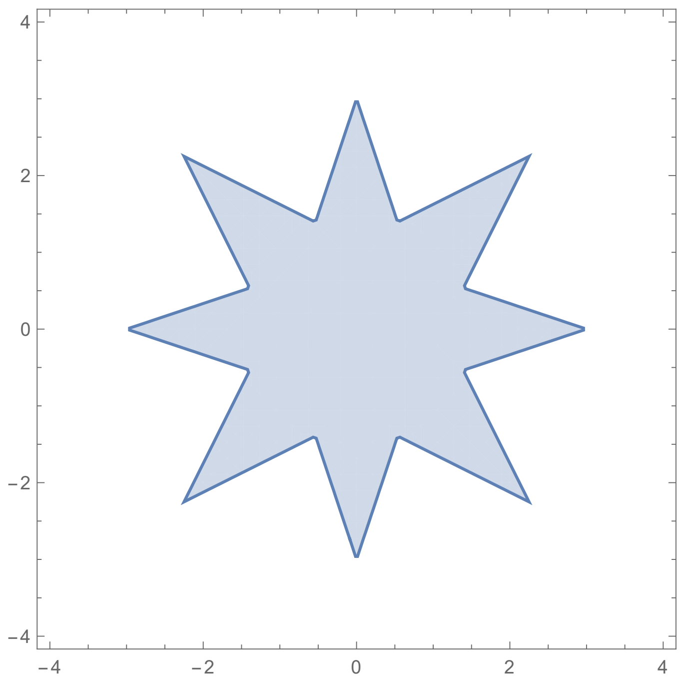

Bild 3. Die Vereinigungsmenge $M_{\mathrm{s}} \cup f(M_{\mathrm{s}})$.