Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Abgabetermin:
10. 01. 2017 bis 10:30

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Übungsaufgaben, Woche 10

10.1 (6 Punkte) Betrachtet werde eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $c_0 \in \mathbb{R}$.

(i) Beweisen Sie, dass aus $\lim_{x \to x_0} f(x) = c_0$ folgt $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |c_0|$.

(ii) Überprüfen Sie, ob umgekehrt aus $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |c_0|$ die Existenz von $\lim_{x \to x_0} f(x)$ folgt.

10.2 (6 Punkte) Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Es sei $\mathcal{D} := (-1,\, 1)$, und für alle $x \in \mathcal{D}$ gelte $f(x^4) = f(x)$. Zeigen Sie, dass aus der Stetigkeit von f bei $x_0 := 0$ folgt, dass f auf dem Interval $(-1,\, 1)$ konstant ist, d.h., es gilt $f(x) = f(0)$ für alle $x \in \mathcal{D}$.

(ii) Nun sei $\mathcal{D} := \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, und die Funktion f sei gegeben durch

$$f(x) := \frac{x^2 + 3x - 6 - 8/x}{6x - 12}.$$

Gibt es dann eine Möglichkeit, die Funktion f auf den fehlenden zwei Punkten 0 und 2 so zu definieren, dass f bei $x = 0$ beziehungsweise bei $x = 2$ stetig wird? Falls ja, welche Werte müsste man dazu $f(0)$ und $f(2)$ jeweils zuordnen?

10.3 (6 Punkte) Für $a \in \mathbb{R}$ seien die Teilmengen $M_a := \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \mid y + ax = 0\}$ und $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ von $\mathbb{C}$ gegeben.

(i) Bestimmen Sie die Schnittmenge $M_a \cap S^1$. Wie müsste man a wählen, damit

$$\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \;\in\; M_a \cap S^1$$

ist?

(ii) Berechnen Sie das Supremum

$$\sup\Big\{\Big|\frac{w-\mathrm{i}}{\overline{w}+\mathrm{i}}\cdot z\Big| \mid \overline{w}\in\mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i}\},\, z\in M_a\cap S^1\Big\},$$

wobei w also alle komplexen Zahlen mit Ausnahme von i und andererseits z die Schnittmenge $M_a \cap S^1$ durchläuft.

10.4 (6 Punkte) Die Menge $M_{\mathrm{s}} \subset \mathbb{C}$ werde durch

$$M_{\mathrm{s}} := \{z = x + \mathrm{i}y \mid |y| \leq 1 - \frac{|x|}{3} \vee |x| \leq 1 - \frac{|y|}{3}\}$$

definiert.

(i) Zeichnen Sie M_{s} in der komplexen Ebene.

(ii) Mithilfe der Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) := \frac{2(1+\mathrm{i})}{3}\, z$$

wird M_{s} auf $f(M_{\mathrm{s}})$ abgebildet. Zeichnen Sie die Vereinigungsmenge $M_{\mathrm{s}} \cup f(M_{\mathrm{s}})$ in der komplexen Ebene.

Für alle Aufgaben gilt: Begründen Sie jeden Schritt in Ihren Lösungen!

Abgabe in den entsprechenden und gekennzeichneten Abgabekästen im ersten Stock des Mathematischen Institutes (in der Nähe des Bibliothekeingangs).

Frohe Weihnachten und alles Gute im Jahre

$$\frac{1}{2}\lfloor\ \sqrt[2018]{2016^{2016}} + \sqrt[2016]{2018^{2018}}\rfloor$$