

Die Iwasawa-Hauptvermutung

Martin Hofer

1 Die Ausgangssituation

Sei p eine ungerade Primzahl und wir bezeichnen mit $\mu_{p^{n+1}}$ die Gruppe der p^{n+1} -ten Einheitswurzeln in einem fixierten algebraischen Abschluss von \mathbb{Q} .

Wir definieren

$$F_n := \mathbb{Q}(\mu_{p^{n+1}})^+, F_\infty := \mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})^+ \text{ und } G = \text{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}).$$

Man kann zeigen, dass dann gilt: $G \cong \Gamma \times \Delta$, wobei $\Delta := \text{Gal}(F_0/\mathbb{Q})$ ein Quotient von $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ ist und $\Gamma := \text{Gal}(F_\infty/F_0) \cong \mathbb{Z}_p$.

Definition 1.1. Sei L_∞ (bzw. M_∞) die maximal abelsche p -Erweiterung von F_∞ welche überall unverzweigt ist (bzw. welche überall unverzweigt ist außerhalb der Primideale¹ über p). Wir schreiben $Y_\infty := \text{Gal}(L_\infty/F_\infty)$ (bzw. $X_\infty := \text{Gal}(M_\infty/F_\infty)$).

Wir wollen nun eine G -Wirkung auf diesen Objekten definieren: Wenn $\sigma \in G$, dann nehmen wir einen beliebigen Lift $\tilde{\sigma}$ in $\text{Gal}(L_\infty/\mathbb{Q})$ und definieren:

$$\sigma.y = \tilde{\sigma}y\tilde{\sigma}^{-1} \text{ f\u00fcr } y \in Y_\infty.$$

Die G -Wirkung auf X_∞ l\u00e4sst sich nun auf \u00e4hnliche Weise definieren.

Als wichtiges Hilfsmittel in unseren Studien haben wir die Iwasawa-Algebra von G bzw. Γ kennengelernt:

$$\Lambda(G) = \varprojlim_H \mathbb{Z}_p[G/H] \text{ bzw. } \Lambda(\Gamma) = \varprojlim_H \mathbb{Z}_p[\Gamma/H]$$

wobei H \u00fcber alle offenen Untergruppen von G bzw. Γ l\u00e4uft.

Bemerkung 1.2. Wir ben\u00f6tigen manchmal die folgenden algebraischen Eigenschaften der Iwasawa-Algebra $\Lambda(\Gamma)$: $\Lambda(\Gamma)$ ist ein lokaler Ring und $\Lambda(\Gamma)$ ist ein faktorieller Ring.

¹hier gibt es nur ein eindeutiges

Da Y_∞ und X_∞ per Konstruktion kompakte \mathbb{Z}_p -Moduln sind, kann man die G -Wirkung mit Stetigkeit und Linearität zu einer Wirkung der gesamten Iwasawa-Algebra $\Lambda(G)$ erweitern. Man kann nun folgendes zeigen:

- a) Der Modul Y_∞ ist ein endlich erzeugter Torsionsmodul über $\Lambda(G)$.
- b) Der Modul X_∞ ist ein endlich erzeugter Torsionsmodul über $\Lambda(G)$. (Theorem 1.4.1 in [CS06]).

Um die Invarianten an denen wir interessiert sind zu definieren benötigen wir das folgende (allgemeiner gültige) Strukturresultat

Theorem 1.3. [CS06, App., Theorem 2] Sei M ein endlich erzeugter $\Lambda(G)$ -Torsionsmodul. Dann gibt es eine exakte Sequenz von $\Lambda(G)$ -Moduln:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^r \Lambda(G)/\Lambda(G)f_j \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow 0,$$

wobei f_1, \dots, f_j Nicht-Nullteiler in $\Lambda(G)$ sind und Q ein $\Lambda(G)$ -Modul mit endlicher Kardinalität.

Definition 1.4. Sei M ein endlich erzeugter $\Lambda(G)$ -Torsionsmodul. Mit Hilfe von Theorem 1.3 können wir ein *charakteristisches Ideal* $\text{ch}_G(M)$ durch

$$\text{ch}_G(M) = f_1 \cdots f_r \Lambda(G)$$

definieren.

Für das gerade definierte charakteristische Ideal gelten folgende wichtige Eigenschaften:

- a) Es ist wohldefiniert, d.h. man kann zeigen, dass $\text{ch}_G(M)$ nur von M abhängt und nicht von der speziellen exakten Sequenz.
- b) Falls

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von endlich erzeugten $\Lambda(G)$ -Torsionsmoduln ist. Dann gilt

$$\text{ch}_G(M_2) = \text{ch}_G(M_1) \cdot \text{ch}_G(M_3).$$

c) Sei M ein endlich erzeugter $\Lambda(G)$ -Torsionsmodul und $\text{ch}_G(M) = f_M \Lambda(G)$ und $|\Delta| = k$. Wenn wir nun M als Γ -Modul, mittels Skalarrestriktion, betrachten gilt

$$\text{ch}_G(M) = f_{M,1} \cdots f_{M,k} \Lambda(\Gamma)$$

wobei die $f_{M,i}$ die Komponenten von f_M in der Zerlegung

$$\Lambda(G) = \bigoplus_{i \bmod k} \Lambda(G)^{(i)}, \text{ mit } \Lambda(G)^{(i)} = \Lambda(\Gamma).$$

Nachdem wir jetzt die 'algebraische Seite' der Iwasawa-Hauptvermutung definieren können, müssen wir uns jetzt noch um die analytische Seite kümmern.

Dazu kann man ein p -adisches Analogon ζ_p zur Riemannsches Zetafunktion $\zeta(s)$ konstruieren. Dies wurde zuerst von Kubota und Leopoldt durchgeführt [KL64]. In unserem Buch ([CS06]) wird der Ansatz verfolgt, dass man die Elemente von $\Lambda(G)$ als \mathbb{Z}_p -wertige Maße auf der Galoisgruppe G interpretiert. Um zu berücksichtigen, dass ζ_p , wie die Riemannsches Zetafunktion, eine einfachen Pol hat, definiert man *Pseudomaße* von G , als ein Element $\mu \in Q(\Lambda(G))$ so dass $(g-1)\mu \in \Lambda(G)$ für alle $g \in G$ gilt. Das Integral

$$\int_G \nu d\mu$$

eines beliebigen nicht-trivialen Homomorphismus $\nu : G \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ gegen ein Pseudomaß μ ist dann wohldefiniert.

In unseren Anwendungen ist der Homomorphismus der zyklotomische Charakter:

Definition 1.5. Sei $\mathcal{G} := \text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})$. Dann induziert die Wirkung von \mathcal{G} auf μ_{p^∞} einen Isomorphismus

$$\chi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$$

welchen wir *zyklotomischen Charakter* nennen.

Nun kann man (und haben wir) folgenden Satz gezeigt:

Theorem 1.6. [CS06, Chp. 1, Theorem 1.4.2] Es gibt ein Pseudomaß ζ_p auf G so dass

$$\int_G \chi(g)^k d\zeta_p = (1 - p^{k-1})\zeta(1 - k)$$

für alle geraden $k \geq 2$.

Das in Theorem 1.6 konstruierte Pseudomaß ζ_p ist nun unsere p -adische Zetafunktion und die Eigenschaft die sie erfüllt nennt man *Interpolationseigenschaft* bezüglich der Riemannsches Zetafunktion $\zeta(s)$.

Sei nun $I(G)$ der Kern der Augmentationsabbildung von $\Lambda(G)$ nach \mathbb{Z}_p . Da ζ_p ein Pseudomaß ist, ist $I(G)\zeta_p$ ein Ideal von $\Lambda(G)$. Als haben wir auch die 'analytische Seite' der Hauptvermutung beschrieben und wir können diese endlich formulieren:

Theorem 1.7. *Iwasawa-Hauptvermutung* Es gilt

$$\mathrm{ch}_G(X_\infty) = I(G)\zeta_p.$$

als Gleichheit von $\Lambda(G)$ -Idealen.

Bemerkung 1.8. a) Die Bezeichnung 'Hauptvermutung' ist natürlich nicht mehr korrekt, da dieses Theorem erstmals (etwas allgemeiner) von Barry Mazur und Andrew Wiles im Jahr 1984 ([MW84]) bewiesen wurde.

b) Wir (sowie [CS06]) verfolgen aber eine Beweisstrategie die auf Arbeiten von Kolyvagin und Thaine (z.B. [Kol90] und [Tha88]) beruht und für den vorliegenden Fall von Rubin in [Lan90] vervollständigt wurde.

c) Die hier präsentierte Variante der Iwasawa-Hauptvermutung ist der einfachste Fall einer mittlerweile sehr großen Familie von Vermutungen. Hier ein paar lose Bemerkungen dazu:

i) Etwas allgemeiner kann man von einer Dirichletschen L -Reihe ausgehen und eine p -adische Variante davon konstruieren die diese an bestimmten ganzzahligen Werten interpoliert.

ii) Auch für $p = 2$ kann man die Vermutung zeigen (cf. [Gre92]).

iii) Anstatt zyklotomische Erweiterung von \mathbb{Q} zu betrachten, hat A. Wiles die Hauptvermutung für den Fall gezeigt, dass der Basiskörper total reell ist.

iv) Es wurde auch eine Vermutung im Stile von Theorem 1.7 für eine spezielle abelsche Erweiterung eines imaginär quadratischen Grundkörper formuliert und teilweise bewiesen. (cf. [CW77]/[CW78] und [Rub91])

v) Man kann auch Vermutungen im Stile von Theorem 1.7 formulieren, bei denen das Grundobjekt eine elliptische Kurve oder noch allgemeinere geometrische Objekte sind. (cf. [Kat07])

d) Die oben genannten Hauptvermutungen haben alle einen gewissen intrinsischen Reiz, aber verstärkt wird das Interesse an Vermutungen dieser Art durch die Feststellung, dass diese Fragestellungen eng verknüpft sind mit der *Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer*, welches eines der sieben Millenniums-Probleme ist.

2 Die wichtigsten Schritte und Tools im Beweis

Wir haben lokale Einseinheiten U_n^1 für $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^{n+1}})^+$ definiert und die Untergruppe der zyklotomischen Einseinheiten C_n^1 sowie E_n^1 den Abschluss in U_n^1 der Einseinheiten von F_n . Damit konnten wir

$$U_\infty^1 = \varprojlim_n U_n^1 \quad C_\infty^1 = \varprojlim_n C_n^1 \quad \text{sowie} \quad E_\infty^1 = \varprojlim_n E_n^1$$

definieren, wobei der projektive Limes bezüglich der Normabbildung läuft. Man sieht, dass G stetig auf diese \mathbb{Z}_p -Module wirkt und man kann sie somit, auf natürliche Weise, mit einer $\Lambda(G)$ -Wirkung ausstatten.

Als nächsten Schritt haben wir nun den folgenden Satz bewiesen

Theorem 2.1. [CS06, Theorem 1.5.1, 4.4.1] *Der $\Lambda(G)$ -Modul U_∞^1/C_∞^1 ist kanonisch isomorph zu $\Lambda(G)/I(G) \cdot \zeta_p(G)$.*

Nun bekommen wir mithilfe der Artinabbildung der globalen Klassenkörpertheorie den folgenden kanonischen $\Lambda(G)$ -Isomorphismus

$$\text{Gal}(M_\infty/L_\infty) \cong U_\infty^1/E_\infty^1$$

und damit dann die folgende exakte Sequenz von endlich erzeugten $\Lambda(G)$ -Torsionsmodul

$$0 \rightarrow E_\infty^1/C_\infty^1 \rightarrow U_\infty^1/C_\infty^1 \rightarrow X_\infty \rightarrow Y_\infty \rightarrow 0.$$

Mit der Multiplikativität des charakteristischen Ideals und Theorem 2.1 erhalten wir:

Proposition 2.2. [CS06, Proposition 4.5.7] *Die Iwasawa-Hauptvermutung (Theorem 1.7) gilt genau dann, wenn*

$$\text{ch}_G(Y_\infty) = \text{ch}_G(E_\infty^1/C_\infty^1).$$

Um dies zu tun, zeigt man zunächst:

$$\text{ch}_G(Y_\infty) \text{ teilt } \text{ch}_G(E_\infty^1/C_\infty^1)$$

mit Hilfe der Euler-System-Methode (die wiederum Chebotarevs Dichtigkeitssatz und Kummertheorie benutzt) und nutzt dann eine 'klassische' Klassenzahlformel um den Beweis zu vervollständigen.

Eine Klassenzahlformel Wir werden, um den Beweis im nächsten Kapitel abschließen zu können, noch eine Klassenzahlformel benötigen. Sei D_n die Gruppe der zyklotomischen Einheiten von F_n und $V_n = \mathcal{O}_{F_n}^\times$. Warren Sinnott hat folgenden Satz bewiesen²

Theorem 2.3. [Sin78, Theorem 4.1] Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$[V_n : D_n] = 2^b h(F_n),$$

wobei $b = 0$ wenn $g = 1$ und $b = 2^{g-2} + 1 - g$ wenn $g \geq 2$, wobei g die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n ist. Insbesondere gilt, für $p \neq 2$

$$|(V_n/D_n)(p)| = |Cl(F_n)(p)|.$$

wobei $(V_n/D_n)(p)$ bzw. $Cl(F_n)(p)$ die p -Sylowuntergruppe von V_n/D_n bzw. $Cl(F_n)$ ist.

Γ -Euler-Charakteristik Sei Γ wie oben isomorph zu \mathbb{Z}_p . Dann induziert das Augmentationsideal von $\Lambda(\Gamma)$ nach \mathbb{Z}_p den Isomorphismus $\Lambda(\Gamma)_\Gamma \cong \mathbb{Z}_p$. Wenn $g \in \Lambda(\Gamma)$, dann schreiben wir $g(0)$ für das Bild unter diesem Isomorphismus.

Sei M ein endlicher erzeugter $\Lambda(\Gamma)$ -Torsionsmodul. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein³

$$H_0(\Gamma, M) = (M)_\Gamma \qquad H_1(\Gamma, M) = M^\Gamma. \qquad (1)$$

Wir sagen M hat endliche Γ -Euler-Charakteristik wenn $H_i(\Gamma, M)$ ($i = 0, 1$) endlich sind, und wenn dies erfüllt ist definieren wir

$$\chi(\Gamma, M) := \frac{|H_0(\Gamma, M)|}{|H_1(\Gamma, M)|}$$

Wir schreiben g_M für ein Element von $\Lambda(\Gamma)$ für das gilt

$$\text{ch}_\Gamma(M) = g_M \Lambda(\Gamma).$$

Proposition 2.4. [CS06, Appendix, Prop. 2] Sei M ein endlich erzeugter $\Lambda(\Gamma)$ -Torsionsmodul. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- i) $H_0(\Gamma, M)$ ist endlich.
- ii) $H_1(\Gamma, M)$ ist endlich.

²Der Primpotenzfall wurde schon von Kummer im 19. Jahrhundert bewiesen.

³Diese kommen natürlich davon, dass es sich hierbei um Homologiegruppen handelt, aber für unsere Zwecke hier genügt die folgende ad hoc Definition.

iii) Es gilt $g_M(0) \neq 0$.

Wenn diese Bedingungen nun erfüllt sind, ist $\chi(\Gamma, M)$ endlich und

$$\chi(\Gamma, M) = |g_M(0)|_p^{-1}.$$

Korollar 2.5. Seien M_1 und M_2 zwei endlich erzeugte $\Lambda(\Gamma)$ -Torsionsmoduln so dass

i) $\text{ch}_\Gamma(M_2) \subset \text{ch}_\Gamma(M_1)$, sowie

ii) M_1 und M_2 endliche Γ -Euler-Charakteristik und es gilt

$$\chi(\Gamma, M_1) = \chi(\Gamma, M_2)$$

Dann gilt

$$\text{ch}_\Gamma(M_1) = \text{ch}_\Gamma(M_2).$$

Proof. Sei g_{M_i} , ($i = 1, 2$) ein Erzeuger von $\text{ch}_\Gamma(M_i)$. Dann gilt nach i): $g_{M_2} = g_{M_1}h$ für ein $h \in \Lambda(\Gamma)$. Wegen ii) sind die Voraussetzungen für den zweiten Teil von Proposition 2.4 und wir erhalten

$$|g_{M_1}(0)|_p^{-1} = \chi(\Gamma, M_1) = \chi(\Gamma, M_2) = |g_{M_2}(0)|_p^{-1}.$$

Somit muss aber gelten $h(0) \in \mathbb{Z}_p^\times$. Also gehört h nicht zum maximalen Ideal des lokalen Rings $\Lambda(\Gamma)$ und somit ist $h \in \Lambda(\Gamma)^\times$ und es folgt:

$$\text{ch}_\Gamma(M_1) = g_{M_1}\Lambda(\Gamma) = g_{M_2}\Lambda(\Gamma) = \text{ch}_\Gamma(M_2)$$

□

Eigenschaften von bestimmten Iwasawa-Moduln

Definition 2.6. Wir definieren

$$N_\infty(U_m^1) = \bigcap_{n \geq m} N_{n,m}(U_n^1),$$

wobei $N_{n,m}$ die Normabbildung von $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^{n+1}})^+$ nach $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^{m+1}})^+$ ist und bezeichnen diese als universelle Norm.

Sei wie oben $\Gamma := \text{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})$ und $\Gamma_n := \text{Gal}(F_\infty/F_n)$

Wiederholung:

Definition 2.7. Sei H eine profinite Gruppe und A ein kompakter H -Modul. Dann ist der *Modul der Koinvarianten* A_H von A der größte Hausdorff-Quotient von A auf dem H trivial wirkt, i.e. A_H ist der Quotient von A und der abgeschlossenen Untergruppe erzeugt von $(ha - h)$, $h \in H$ und $a \in A$. Der *Modul der Invarianten* wird mit A^H bezeichnet und ist definiert als:

$$A^H := \{a \in A : ha = a \text{ für alle } h \in H\}.$$

Im Verlaufe des Seminars haben wir nun folgende Aussagen gezeigt:

Proposition 2.8. Für $n \geq 0$ gilt:

i)

$$(U_\infty^1/C_\infty^1)^{\Gamma_n} = 0 \qquad (U_\infty^1/C_\infty^1)_{\Gamma_n} = N_\infty(U_n^1)/C_n^1$$

ii)

$$(E_\infty^1/C_\infty^1)^{\Gamma_n} = 0 \qquad (E_\infty^1/C_\infty^1)_{\Gamma_n} = N_\infty(E_n^1)/C_n^1$$

iii)

$$(X_\infty)^{\Gamma_n} = ? \qquad (X_\infty)_{\Gamma_n} = \text{Gal}(M_n/F_\infty)$$

iv)

$$(Y_\infty)^{\Gamma_n} = E_n^1/N_\infty(E_n^1) \qquad (Y_\infty)_{\Gamma_n} = \text{Gal}(L_n/F_n) = A_n$$

Leopoldt-Vermutung in einem Spezialfall Wir verwenden die Notation von oben. In unserem Spezialfall wurde die Leopoldt-Vermutung von A. Brumer⁴ gezeigt und man kann sie hier so formulieren:

Theorem 2.9. Es gelten die folgenden äquivalenten Aussagen, die man (auch allgemeiner) als Leopoldt-Vermutung bezeichnet:

i) $\text{Gal}(M_n/F_\infty)$ ist endlich.

ii) $\text{rank}_{\mathbb{Z}_p}(E_n^1) = [F_n : \mathbb{Q}] - 1$.

Korollar 2.10. Wir sehen nun, dass aus Theorem 2.9 folgt, dass $(X_\infty)^{\Gamma_n}$ und $(X_\infty)_{\Gamma_n}$ endlich sind.

⁴Einen Beweis in moderner Notation findet man beispielsweise in [NSW08].

3 Letzter Teil des Beweises der Hauptvermutung

Wir wollen nun also zuerst zeigen:

$$\text{ch}_G(Y_\infty) \text{ teilt } \text{ch}_G(E_\infty^1/C_\infty^1)$$

Um das zu tun wiederholen wir einiges an Notation: Sei

$$F = F_m = \mathbb{Q}(\mu_{p^{m+1}})^+$$

für eine ganze Zahl $m \geq 0$. Sei $A = A_m$ die p -Sylowuntergruppe von $\text{Cl}(F)$ und sei $\Pi = \text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ sowie $R = R_m = \mathbb{Z}_p[\Pi]$.

Mit Theorem 1.3 erhalten wir

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^h \frac{\Lambda(G)}{\Lambda(G)f_i} \rightarrow Y_\infty \rightarrow Q \rightarrow 0$$

Außerdem haben wir gezeigt, dass es einen Isomorphismus

$$E_\infty^1/C_\infty^1 \cong \Lambda(G)/\beta\Lambda(G).$$

Wir fixieren einen Annulator $\delta \in \Lambda(G)$ des endlichen Moduls Q ; mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $R/\text{pr}(\delta)R$, wobei für $x \in \Lambda(G)$, $\text{pr}(x)$ das Bild in R unter der natürlichen Abbildung ist. Wir haben ebenfalls bereits gezeigt, dass

$$R/\text{pr}(\beta)R$$

endlich ist. Sei nun s eine fixierte p -Potenz, welche $R/\text{pr}(\delta)R$ und $R/\text{pr}(\beta)R$ annulliert. Wir definieren nun

$$t = |A| \cdot |Q| \cdot p^m \cdot s^{h+1} \text{ und } \mathcal{R} = (\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})[\Pi].$$

Wenn $x \in \Lambda(G)$ ist, schreiben wir x^* für das Bild in \mathcal{R} der natürlichen Abbildung von $\Lambda(G)$ nach \mathcal{R} .

Wir haben und schon gezeigt, dass gilt:

Theorem 3.1. [CS06, Theorem 6.2.1] Für $i = 1, \dots, h$ gilt, das Produkt

$$f_1^* \cdots f_i^* \text{ teilt } ((\gamma - 1)\beta\delta^{i+1})^*$$

in \mathcal{R} .

Wir wollen zeigen:

$$\text{ch}_G(Y_\infty) \text{ teilt } \text{ch}_G(E_\infty^1/C_\infty^1)$$

Behauptung 3.2. Es gilt

$$f_1 \cdots f_h \text{ teilt } (\gamma - 1)\beta\delta^{h+1} \text{ in } \Lambda(G). \quad (2)$$

Proof. Es gilt

$$\Lambda(G) = \varprojlim_m (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})[\text{Gal}(F_m/\mathbb{Q})]$$

Da $p^{m+1} \mid t$ per Definition folgt mit Theorem 3.1 für $i = h$, dass eine analoge Behauptung zu (3.2) in allen Gruppenringen

$$(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})[\text{Gal}(F_m/\mathbb{Q})]$$

für alle $m \geq 0$ gilt, und mit einem Kompaktheitsargument auch in $\Lambda(G)$. \square

Behauptung 3.3. Man kann zwei Elemente δ_1 und δ_2 teilerfremd⁵ aus $\Lambda(G)$ finden welche Q annullieren und für die gilt $R_m/\text{pr}(\delta_1)$ sowie $R_m/\text{pr}(\delta_2)$ sind endlich. Insbesondere, gilt

$$f_1 \cdots f_h \text{ teilt } (\gamma - 1)\beta \text{ in } \Lambda(G).$$

Proof. Die endliche Gruppe Q wird annulliert von $(p, T)^k$ für ein genügend großes k . Man nehme beispielsweise δ_1 und δ_2 mit p^k und $T^k + p^k$ in jeder Komponente. \square

Behauptung 3.4. Es gilt

$$f_1 \cdots f_h \text{ teilt } \beta \text{ in } \Lambda(G)$$

und somit haben wir

$$\text{ch}_G(Y_\infty) \text{ teilt } \text{ch}_G(E_\infty^1/C_\infty^1)$$

gezeigt.

Proof. Proposition 2.8 iv) zeigt, dass $(Y_\infty)_{\Gamma_0}$ endlich ist. Also ist $\gamma - 1$ teilerfremd zu $f_1 \cdots f_h$. \square

Behauptung 3.5. Die Gruppen $H_i(\Gamma, Y_\infty)$ und $H_i(\Gamma, E_\infty^1/C_\infty^1)$ sind endlich und es gilt

$$\chi(\Gamma, Y_\infty) = \chi(\Gamma, E_\infty^1/C_\infty^1).$$

Proof. Aus Theorem 2.3 und Theorem 2.9 (Leopoldt-Vermutung) erhalten wir:

$$|A_0| = |(V_0/D_0)(p)| = |E_0^1/C_0^1|. \quad (3)$$

⁵ wir bezeichnen zwei Elemente als teilerfremd, wenn sie in jeder Komponente teilerfremd sind. Das macht Sinn, da jede Komponente ein faktorieller Ring ist.

Aus Proposition 2.8 ii) und iv) erhalten wir für $n = 0$ und $\Gamma = \Gamma_0$

$$(E_\infty^1/C_\infty^1)^\Gamma = 0, \quad (E_\infty^1/C_\infty^1)_\Gamma = N_\infty(E_0^1)/C_0^1, \quad (Y_\infty)^\Gamma = E_0^1/N_\infty(E_0^1) \quad (Y_\infty)^\Gamma = A_0 \quad (4)$$

Wegen der Endlichkeit der Klassenzahl von F_0 ist natürlich auch $|A_0|$ und somit alle obigen Gruppen endlich. Kombinieren wir (3) und (4) jetzt erhalten wir

$$|(Y_\infty)^\Gamma| \cdot |(E_\infty^1/C_\infty^1)_\Gamma| = |E_0^1/C_0^1| = |A_0| = |(Y_\infty)_\Gamma|$$

und die Behauptung sofort. □

Nun können wir endlich den Hauptsatz unseres Seminars beweise

Theorem 3.6.

$$\text{ch}_G(Y_\infty) = \text{ch}_G(E_\infty^1/C_\infty^1)$$

Proof. Wir erinnern uns, dass gilt

$$\Lambda(G) = \bigoplus_i \Lambda(G)^{(i)} \quad \text{mit} \quad \Lambda(G)^{(i)} = \Lambda(\Gamma).$$

und man kann das Problem (mit Eigenschaft c) nach Definition 1.4) darauf reduzieren zu zeigen, dass gilt:

$$\text{ch}_\Gamma(Y_\infty) = \text{ch}_\Gamma(E_\infty^1/C_\infty^1)$$

Dafür können wir aber jetzt Korollar 2.5 benutzen. Um das tun zu können, müssen wir die beiden Voraussetzungen erfüllen. Nun ist aber Voraussetzung i) genau der zweite Teil der Behauptung 3.4 und Voraussetzung ii) genau die Behauptung 3.5, also haben wir das Theorem und somit die Iwasawa-Hauptvermutung gezeigt. □

Bemerkung 3.7. Wer jetzt auf den Geschmack gekommen ist und mehr über den derzeitigen Forschungsstand in der Iwasawa-Theorie wissen will, dem sei ein Übersichtsartikel [Sha19] wärmstens empfohlen.

References

- [CS06] J. Coates and R. Sujatha. *Cyclotomic fields and zeta values*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [CW77] John Coates and Andrew Wiles. On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer. *Invent. Math.*, 39(3):223–251, 1977.
- [CW78] John Coates and Andrew Wiles. On p -adic L -functions and elliptic units. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 26(1):1–25, 1978.
- [Gre92] Cornelius Greither. Class groups of abelian fields, and the main conjecture. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 42(3):449–499, 1992.
- [Kat07] Kazuya Kato. Iwasawa theory and generalizations. In *International Congress of Mathematicians. Vol. I*, pages 335–357. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.
- [KL64] Tomio Kubota and Heinrich-Wolfgang Leopoldt. Eine p -adische Theorie der Zetawerte. I. Einführung der p -adischen Dirichletschen L -Funktionen. *J. Reine Angew. Math.*, 214/215:328–339, 1964.
- [Kol90] V. A. Kolyvagin. Euler systems. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 435–483. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [Lan90] Serge Lang. *Cyclotomic fields I and II*, volume 121 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990. With an appendix by Karl Rubin.
- [MW84] Barry Mazur and Andrew Wiles. Class fields of abelian extensions of \mathbb{Q} . *Invent. Math.*, 76(2):179–330, 1984.
- [NSW08] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg. *Cohomology of number fields*, volume 323 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2008.
- [Rub91] Karl Rubin. The ”main conjectures” of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields. *Invent. Math.*, 103(1):25–68, 1991.
- [Sha19] R. Sharifi. Iwasawa theory: a climb up the tower. *Notes of the American Mathematical Society*, 66(1), 2019.

- [Sin78] W. Sinnott. On the Stickelberger ideal and the circular units of a cyclotomic field. *Ann. of Math. (2)*, 108(1):107–134, 1978.
- [Tha88] Francisco Thaine. On the ideal class groups of real abelian number fields. *Ann. of Math. (2)*, 128(1):1–18, 1988.