Prof. Dr. Andreas Rosenschon
Martin Hofer, Pascal Stucky, Simon Weinzierl

Sommersemester 2020
24. April 2020

Lineare Algebra II – Übungsblatt 1

Hinweis: Die Aufgaben die zum Übungsmodul zählen, sind mit einem Stern markiert und nur diese Aufgaben sollen abgegeben werden, also auf diesem Übungsblatt Aufgabe 1 und 3.

Aufgabe 1 (6 Punkte, $*$).
Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = n < \infty$ und seien U_1, U_2 lineare Unterräume von V. Zeigen Sie:

a) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$,

b) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

Aufgabe 2 (keine Korrektur).
Die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die dazu duale Basis als Linearkombination der dualen Standardbasis $f_1, ...f_4$ definiert durch

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Aufgabe 3 (8 Punkte, $*$).
Sei K ein Körper und V, V' seien endlich-dimensionale K-Vektorräume. Sei $A : V \longrightarrow V'$ ein Homomorphismus und $A^* : V'^* \longrightarrow V^*$ die zugehörige duale Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{coker}(A^*) := V^*/\operatorname{im}(A^*)$$

kanonisch isomorph zu $(\ker(A))^*$ ist.
Bemerkung: Die Aussage gilt auch für unendlich-dimensionale Vektorräume. Für den allgemeinen Beweis benötigt man Proposition 11.13., die voraussichtlich nächste Woche besprochen wird.

Aufgabe 4 (keine Korrektur).
Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow V^{**} \\ v &\longmapsto (f \mapsto f(v)) \end{aligned}$$

aus Proposition 11.4. im Allgemeinen kein Isomorphismus ist.

a) Es sei

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_0, a_1, ...) \mid a_i \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : a_m = 0 \forall m \geq n\}$$

die Menge der abbrechenden Folgen über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

b) Zeigen Sie, dass der Dualraum $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})^*$ isomorph zum Vektorraum

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_0, a_1, ...) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

aller Folgen über $\mathbb{R}$ ist.

c) Zeigen Sie, dass die Dimension von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ überabzählbar ist.

d) Zeigen Sie, dass die Abbildung T nicht surjektiv ist.

Nur eine vollständig ausgearbeitete Lösung kann mit der maximalen Anzahl an Punkten bewertet werden. Ihre Lösungen sind spätestens am **Freitag, 1. Mai 2020** um **12:15 Uhr** auf Moodle hochzuladen und einzureichen.