LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2015/16
21. Oktober 2015

Zentralübung 2

Ergänzungen zur Vorlesung

eine Zusammenfassung des Inhalts der 2. Zentralübung im Stil der Protokolle zu den Vorlesungen

1 Äquivalenzrelationen

Beispiel 1.1 *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.*

a) Zeigen Sie: $x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$ definiert eine Äquivalenzrelation.

b) Konstruieren Sie eine Bijektion zwischen der Menge $f(X)$ und der Menge der Äquivalenzklassen $X/\sim$.

Notation 1.1 *Wir werden in Zukunft noch öfters folgende Schreibweisen benötigen:*

$$[x] := \{x' \in X \mid x' \sim x\}$$

für eine Äquivalenzklasse und

$$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$$

für die Menge der Äquivalenzklassen.

Lemma 1.1 *Sei X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann gilt für $x_1, x_2 \in X$ entweder $[x_1] \cap [x_2] = \emptyset$ oder $[x_1] = [x_2]$; die verschiedenen Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ bilden eine Partition von X.*

2 Gruppentheorie

Definition 2.1 *Eine* Gruppe *G ist eine Menge mit einer binären Operation $G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto ab$ und einem Element $e \in G$, so dass gilt:*

i) $a(bc) = (ab)c$ für alle $a, b, c \in G$;

ii) $ae = ea = a$ für alle $a \in G$;

iii) für jedes $a \in G$ gibt es ein $a' \in G$ mit $aa' = e = a'a$.

Lemma 2.1 *Sei G eine Gruppe.*

i) Wenn $e_0 \in G$ mit $e_0 a = a$ für alle $a \in G$, dann gilt $e_0 = e$.

ii) Sei $a \in G$. Wenn $b \in G$ mit $ba = e$ gilt, dann folgt $b = a'$.

Bemerkung 2.1 *Das Inverse von $a \in G$ ist eindeutig; wir schreiben dafür $a^{-1} \in G$ und es gilt $a^{-1}a = e = a^{-1}a$.*

Lemma 2.2 *Sei G eine Gruppe.*

a) *Wenn* $a, b, x \in G$ *mit* $xa = xb$ *oder* $ax = bx$, *dann gilt* $a = b$.

b) *Wenn* $a, b \in G$, *dann gilt* $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

3 Kongruenzen

Definition 3.1 *Fixiere* $m \geq 0$, *dann sind* $a, b \in \mathbb{Z}$ kongruent modulo m, *schreibe* $a \equiv b \mod m$, *wenn* $m \mid (a - b)$.

Bemerkung 3.1 *Im Spezialfall* $m = 0$ *handelt es sich hierbei um die gewöhnliche Gleichheit. Der Spezialfall ist* $m = 1$ *ist nicht besonders interessant, da* $1 \mid (a - b)$ *immer erfüllt ist. Also beschränken wir unsere Betrachtungen gewöhnlich auf* $m \geq 2$.

Lemma 3.1 *Sei* $m \geq 2$ *eine ganze Zahl. Wenn* $a_1 \equiv a_1' \mod m$ *und* $a_2 \equiv a_2' \mod m$ *ist, dann gilt*

a) $a_1 + a_2 \equiv a_1' + a_2' \mod m$ *und*

b) $a_1 a_2 \equiv a_1' a_2' \mod m$.

Beispiel 3.1 *Wenn* $a \in \mathbb{Z}$ *gilt, dann ist* $a^2 \equiv 0, 1$ *oder* $4 \mod 8$.