Grundlagen der Iwasawatheorie

Martin Hofer

1 Unendliche Galoistheorie

Sei K/k eine algebraische Erweiterung von Körpern und wir nehmen an sie ist galoissch. Wir bezeichnen mit $G := \mathrm{Gal}(K/k)$ die Gruppe der Automorphismen von K welche k punktweise fixieren. Wir nehmen an $k \subseteq F \subseteq K$ mit F/k endlich. Dann hat $G_F = \mathrm{Gal}(K/F)$ endlichen Index in G. Die Topologie auf G ist definiert dadurch, dass die G_F eine Basis der Nachbarschaft um die Identität in G bilden. Damit ist G profinit und

$$G \cong \varprojlim_F G/G_F \cong \varprojlim_F \mathrm{Gal}(F/k),$$

wobei F alle endlichen normalen Teilerweiterungen F/k durchläuft oder über irgendeine Teilfolge von solchen F, so dass $\bigcup F = K$. Die Reihenfolge der Indizes ist durch die Inklusion bestimmt ($F_1 \subseteq F_2$) und die Abbildungen im inversen Limes sind die natürlichen Abbildungen $\mathrm{Gal}(F_2/k) \to \mathrm{Gal}(F_1/k)$.

Theorem 1.1. ***Fundamentalsatz der Galoistheorie***
Es gibt eine 1-1-Korrespondenz zwischen den abgeschlossenen Untergruppen H von G und den Körpern $k \subseteq L \subseteq K$:

$$H \leftrightarrow \text{ Fixkörper von } H,$$
$$\mathrm{Gal}(K/L) \leftrightarrow L$$

Offene Untergruppen entsprechen den endlichen Erweiterungen, normale Untergruppen entsprechen den normalen Erweiterungen usw.

Beispiel 1.2. *Wir betrachten $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}$. Ein Element $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q})$ ist bestimmt durch die Operation auf ζ_{p^n} für alle $n \geq 1$. Für jedes n haben wir $\sigma(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^{a_n}$ für ein $a_n \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ und es gilt $a_n \equiv a_{n-1} \bmod p^{n-1}$. Also erhalten wir ein Element*

$$\mathbb{Z}_p^\times = \varprojlim_n (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times = \varprojlim_n \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}).$$

Andererseits, wenn $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ gilt, dann definiert $\sigma(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^a$ einen Automorphismus.

Definition 1.3. Der *zyklotomische Charakter* $\chi : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ ist definiert durch

$$\sigma(\zeta) = \zeta^{\chi(\sigma)} \text{ für alle } \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}) \text{ und } \zeta \in \mu_{p^\infty}.$$

2 Globale Klassenkörpertheorie

Eine Motivation für die globale Klassenkörpertheorie ist folgender Satz aus dem 19. Jahrhundert der auf Kronecker, Weber und Hilbert zurückgeht. Diese Formulierung findet man in [KKS11]:

Theorem 2.1. *Sei L ein Zahlkörper.*

1) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
   - i) *Der Zahlkörper L ist eine abelsche Erweiterung von $\mathbb{Q}$.*
   - ii) *Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $L \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_N)$.*
2) *Sei $N \in \mathcal{N}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*
   - i) *Es gilt $L \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_N)$.*
   - ii) *Ob eine Primzahl p voll zerlegt in L wird von $p \bmod N$ festgelegt.*
3) *Sei L eine abelsche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ und N die kleinste natürliche Zahl so dass gilt $L \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_N)$. Dann gilt für jede Primzahl p:*

$$p \text{ verzweigt in } L \Leftrightarrow p \mid N.$$

Sei K ein Zahlkörper und $\mathcal{O}_K$ sein Ganzheitsring.

Definition 2.2. Ein Element $\alpha \neq 0$ in K nennt man *total positiv* falls für jeden Körperhomorphismus $K \to \mathbb{R}$ gilt, dass das Bild von α positiv ist.

Die Hauptresultate der globalen Klassenkörpertheorie kann man folgendermaßen zusammenfassen. Die Formulierung stammt wieder aus [KKS11]:

Theorem 2.3. *Sei $\mathfrak{a} \neq (0)$ ein Ideal von $\mathcal{O}_K$. Dann gilt:*

1) *Es gibt eine endliche Erweiterung $K(\mathfrak{a})$ von K welche die folgenden Eigenschaften besitzt: Wenn ein Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ das Ideal $\mathfrak{a}$ nicht teilt, dann ist $\mathfrak{p}$ unverzweigt und es gilt die folgende Äquivalenz:*

$$\mathfrak{p} \text{ ist voll zerlegt in } K(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \text{ es gibt ein total pos. } \alpha \in \mathcal{O}_K \text{ so dass } \mathfrak{p} = (\alpha), \alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}.$$

2) *$K(\mathfrak{a})$ ist eine abelsche Erweiterung von K und für jede endliche abelsche Erweiterung von K gibt es ein $\mathfrak{a}$ s.d. sie in $K(\mathfrak{a})$ enthalten ist.*

3) *Wenn $\mathfrak{b} \neq 0()$ ein Ideal von $\mathcal{O}_K$ ist mit $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, dann gilt*

$$K(\mathfrak{a}) \subseteq K(\mathfrak{b}).$$

4) *Wenn L eine endliche abelsche Erweiterung von K ist, dann gibt es ein größtes Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathcal{O}_K$ so dass $L \subseteq K(\mathfrak{a})$. Darüber hinaus hat $\mathfrak{a}$ die folgende Eigenschaft: für jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ in $\mathcal{O}_K$ gilt:*

$$\mathfrak{p} \text{ verzweigt in } L \Leftrightarrow \mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}.$$

Strahlklassengruppen Sei K ein Zahlkörper. Wir erinnern uns an die Zahlentheorievorlesung in der wir gelernt haben, dass die Klassengruppe von K definiert ist durch:

$$Cl(K) = \text{ Gruppe der gebrochenen Ideale /Gruppe der gebrochenen Hauptideale.}$$

Analog kann man für ein Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathcal{O}_K$ definieren

$$Cl_K(\mathfrak{a}) = I_K(\mathfrak{a})/P_K(\mathfrak{a})$$

wobei $I_K(\mathfrak{a})$ die gebrochenen Ideale von K sind die in der Form $\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}$ mit $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \neq (0)$ Ideale aus $\mathcal{O}_k$ teilerfremd zu $\mathfrak{a}$ ausgedrückt werden können und $P_K(\mathfrak{a})$ die Grupppe der gebrochenen Ideale (α) mit $\alpha \in K^\times$, *alpha* total pos. und es kann in der Form $\alpha = bc^{-1}$ geschrieben werden für $b, c \in \mathcal{O}_K$ teilerfremd zu $\mathfrak{a}$ so dass $b \equiv c \bmod \mathfrak{a}$.

Artinabbildung Für $K = \mathbb{Q}$ und $\mathfrak{a} = N\mathbb{Z}$ kann man nun zeigen, dass $K(\mathfrak{a}) = \mathbb{Q}(\zeta_N)$ gilt und $Cl_K(\mathfrak{a}) = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Wir wissen außerdem, dass gilt $\mathbb{Q}(\zeta_N) \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Aber dies lässt sich auch verallgemeinern, dann man kann zeigen, dass

$$\Phi_K : Cl_K(\mathfrak{a}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{a})/K)$$

gilt. Für $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{a}$, wird $[\mathfrak{p}]$ vom Isomorphismus Φ_K auf den Frobenius $\mathrm{Frob}_\mathfrak{p} \in \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{a})/K)$ abgebildet. Diese Abbildung wird *Artin-Abbildung* oder *Reziprozitätsabbildung* genannt.

3 Die Struktur von Λ-Moduln

Sei $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$. Wir erinnern uns, dass wir ein nicht-konstantes Polynom $P(T) \in \Lambda$ *ausgezeichnetes Polynom* nennen, falls gilt

$$P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots a_0, \quad p \mid a_i, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Wir erinnern uns ebenfalls an den p-adischen Weierstraßschen Vorbereitungssatz, wobei wir hier $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$, $\mathfrak{p} := p\mathbb{Z}$ setzen:

Theorem 3.1. *Sei $f(T) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \in \mathcal{O}[[T]]$ und wir nehmen an, dass für ein n gilt, $a_i \in \mathfrak{p}$, $0 \leq i \leq n-1$, aber $a_n \notin \mathfrak{p}$. Dann kann $f(T)$ eindeutig in der Form $f(T) = P(T)U(T)$, wobei $U(T) \in \Lambda^\times$ liegt und $P(T)$ ein ausgezeichnetes Polynom von Grad n ist.*

Allgemeiner, wenn $0 \neq f(T) \in \Lambda$ ist, dann findet man eine eindeutige Darstellung

$$f(T) = \pi^\mu P(T)U(T)$$

mit P und U wie oben und $\mu \in \mathbb{N}_0$.

Eigenschaften von Λ

- Λ ist ein faktorieller Ring.
- Die Primideale von Λ sind 0, (p, T), (p) und die Ideale $(P(T))$, wobei $P(T)$ irreduzibel und ausgezeichnet ist. Das Ideal (p, T) ist das eindeutige maximale Ideal. ([Was97, Prop. 13.9])
- Λ ist ein Noetherscher Ring ([Was97, Lemma 13.11])

Definition 3.2. Zwei Λ-Moduln M und M' nennt man *pseudo-isomorph*, geschrieben als $M \sim M'$, wenn es einen Homomorphismus $M \to M'$ mit endlichen Kern und Kokern. Das heißt es gibt eine exakte Sequenz von Λ-Moduln

$$0 \to A \to M \to M' \to B \to 0$$

mit A und B endliche Λ-Moduln.

Nun kann man folgenden Struktursatz für Λ-Moduln beweisen

Theorem 3.3. *[Was97, Thm. 13.12] Sei M eine endlich erzeugter Λ-Modul. Dann gilt*

$$M \sim \Lambda^r \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{s} \Lambda/(p^{n_i}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{t} \Lambda/(f_j(T)^{m_j}) \right),$$

wobei $r, s, t, n_i, m_j \in \mathbb{Z}$ und f_j ausgezeichnete irreduzible Polynome sind.

Der Beweis ähnlich zu dem Beweis für den Struktursatz von Hauptidealringen. Man bezeichnet die rechte Seite auch den elementaren Λ-Modul und man kann zeigen, dass dieser durch X schon eindeutig festgelegt wird.

Sei nun X ein endlich erzeugter Λ-Torsionsmodul. Dann definieren wir das charakteristische Ideal von X als

$$\mathrm{char}(X) = (\prod_{i=1}^{s} p^{n_i} \prod_{j=1}^{t} f_j(T)^{m_j})\Lambda$$

und $\lambda(X) = \sum_{j=1}^{t} \deg(f_j)m_j$ und $\mu(X) = \sum_{i=1}^{s} n_i$. Wobei wir hier auch bemerken wollen, dass die Ähnlichkeit der Notation mit den Konstanten in der Wachstumsformel von Iwasawa (siehe 4.2) nicht zufällig ist.

4 Einführung Iwasawa-Theorie

4.1 Idealklassengruppen von Kreisteilungskörpern

Kummer's Kriterium gibt uns folgende Relation zwischen Klassengruppen und Zeta-Funktionen:

$$p \mid \#Cl(\mathbb{Q}(\mu_p)) \Leftrightarrow p \text{ teilt ein der Zähler von } \zeta(-1), \zeta(-3), \zeta(-5), \ldots$$

Primzahlen mit dieser Eigenschaft nennt man *irreguläre Primzahlen.* Die kleinsten solchen Primzahlen sind $37, 59, 67, 101, \ldots$. Man kann auch zeigen, dass gilt $h_{\mathbb{Q}(\mu_{37})} = 37$ also ist die Klassengruppe die zyklische Gruppe der Ordnung 37. Iwasawa-Theorie sagt uns aber noch mehr als das: Sei p eine ungerade Primzahl und $\Delta = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$. Dann wirkt Δ auf $Cl(\mathbb{Q}(\mu_p))$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \Delta \times Cl(\mathbb{Q}(\mu_p)) &\to Cl(\mathbb{Q}(\mu_p)) \\ (\sigma, [a]) &\mapsto [\sigma(a)] \end{aligned}$$

Ein Satz von Herbrand und Ribet besagt nun folgendes:

Theorem 4.1. *Sei $r \in 2\mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1) Der Zähler von $\zeta(1-r)$ ist durch p teilbar.

2) Es gibt ein Element $x \in Cl(\mathbb{Q}(\mu_p))$ mit Ordnung p, so dass für alle $\sigma \in \Delta$ gilt:

$$\sigma(x) = \omega(\sigma)^{1-r}x$$

Sei F ein Zahlkörper. Dann bezeichnen wir mit A_F die p-Sylowuntergruppe von $Cl(F)$.

In unserem Beispielfall haben wir also $Cl(\mathbb{Q}(\mu_{37})) = A_{\mathbb{Q}(\mu_{37})} \cong \mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$. Man kann auch zeigen, dass gilt

$$A_{\mathbb{Q}(\mu_{37^n})} \cong \mathbb{Z}/37^n\mathbb{Z}.$$

Eines der ersten Resultate in dieser Theorie war das folgende von Iwasawa aus dem Jahr 1959:

Theorem 4.2. ***(Wachstumsformel von Iwasawa)***
Sei K ein Zahlkörper und $K_n = K(\mu_{p^n})$. Dann gibt es Konstanten $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{Z}$ so dass für genügend große n gilt:

$$|A_{K_n}| = p^{\lambda n + p^n \mu + \nu}$$

- **Ausgangspunkt der Iwasawa-Theorie**: Wachstumsformel von Iwasawa.
- **Ziel**: Zusammenhang zwischen Invarianten von Klassengruppen und p-adischen Riemannschen Zeta-Funktionen zu studieren.
- **Motivation:** Die Motivation dafür bekam Iwasawa aus ähnlichen Situationen in der Theorie der Funktionenkörper.

Definition 4.3. Sei p ungerade Primzahl. Das Element $(a, 1) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$ kann als die $(p-1)$-Einheitswurzel in $\mathbb{Z}_p^\times$ betrachtet werden für die gilt:

$$\omega(a) \equiv a \bmod p.$$

Als ein Dirichletcharakter, kann man ω zur Funktion $\omega : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p^\times$ erweitern durch $\omega(p\mathbb{Z}) = 0$

Wir wissen aus der Algebra das gilt $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_n)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Sei N_0 teilerfremd zu einer fixierten ungeraden Primzahl p. Zur Vereinfachung setzen wir $K_\infty := \mathbb{Q}(\mu_{N_0 p^\infty})$. Man kann nun zeigen, dass gilt

$$\mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbb{Q}) \cong \Delta \times \Gamma$$

mit $\Delta \cong (\mathbb{Z}/N_0 p\mathbb{Z})^\times$ und $\Gamma \cong \mathbb{Z}_p$.

Für jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbb{Q})$, gibt es nun ein eindeutiges Element $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$ für das gilt

$$\sigma(\zeta) = \zeta^\alpha \text{ für jedes } \zeta \in \mu_{p^n} \text{ und jedes } n > 0.$$

Wir bezeichnen diese α mit $\kappa(\sigma)$ und erhalten somit den Homomorphismus

$$\kappa : \mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}_p^\times,$$

welcher auch *zyklotomischer Charakter* genannt wird.

Wir betrachten nun die Abbildung

$$\mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\kappa} \mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\bmod p} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$$

und den Teichmüllercharakter $\omega : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$ von oben. Mit Missbrauch der Notation bezeichnen wir die Komposition dieser Abbildungen mit $\omega : \mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}_p^\times$ und wir nennen diese Abbildung ebenfalls *Teichmüllercharakter*.

4.2 Maximal unverzweigte abelsche Erweiterung und die Idealklassengruppe

Sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Zur Vereinfachung nehmen wir an K hat keine reelle Stelle. Eine Erweiterung in der jedes Primideal unverzweigt ist nennt man *unverzweigte Erweiterung*. Sei H_K/K die maximal unverzweigte abelsche Erweiterung von K im algebraischen Abschluss K^c von K. Klassenkörpertheorie sagt uns, dass H_K/K eine endliche Erweiterung ist und dass:

$$\Phi_K : Cl(K) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}(H_K/K).$$

Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von K und $[\mathfrak{p}] \in Cl(K)$. Wir erinnern uns, dass gilt

$$\Phi_K([\mathfrak{p}]) = \mathrm{Frob}_\mathfrak{p} \in \mathrm{Gal}(H_K/K),$$

wobei $\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}$ der Frobenius bei $\mathfrak{p}$ ist. Man nennt H_K den Hilbertklassenkörper von K. Sei nun K/F eine endliche Galoiserweiterung. Dann operiert $\mathrm{Gal}(K/F)$ natürlich auf $Cl(K)$ durch

$$\sigma([\alpha]) = [\sigma(\alpha)] \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$$

wobei $[\alpha] \in Cl(K)$.

Man kann zeigen, dass die Erweiterung H_K/F galoissch ist. In der Tat, sei H'_K ein konjugierter Körper von H_K über F, dann gilt $K \subset H'_K$, da K/F eine Galoiserweiterung ist. Da H'_K/K unverzweigt ist und die Galoisgruppe H_K/K und H'_K/K isomorph sind, ist H'_K/K eine abelsche Erweiterung. Aber, da H_K die maximale unverzweigte abelsche Erweiterung von K ist, gilt $H'_K \subset H_K$ und somit ist H_K/F galoissch.

Als definieren wir eine Wirkung von $\mathrm{Gal}(K/F)$ auf $\mathrm{Gal}(H_K/K)$ durch Konjugation. Für $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$, $s \in \mathrm{Gal}(H_K/K)$ definieren wir

$$\sigma(s) = \tilde{\sigma} s \tilde{\sigma}^{-1}$$

wobei $\tilde{\sigma}$ ein Lift von σ nach $\mathrm{Gal}(H_K/F)$ ist, i.e eine Element für das gilt $\tilde{\sigma}_{|K} = \sigma$. Da $\mathrm{Gal}(H_K/K)$ eine abelsche Gruppe ist, hängt $\tilde{\sigma} s \tilde{\sigma}^{-1}$ nicht von der Wahl von $\tilde{\sigma}$ ab.

Der Frobenius folgendes erfüllt:

$$\mathrm{Frob}_{\sigma(\mathfrak{p})} = \tilde{\sigma}\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}\tilde{\sigma}^{-1} \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(H_K/F).$$

Somit sehen wir das die Reziprozitätsabbildung mit der Wirkung auf die Galoisgruppe kommutiert, i.e.

$$\Phi_K([\sigma(\alpha)]) = \sigma\Phi_K([\alpha]) \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(H_K/F).$$

Als nächstes wollen wir uns überlegen, dass Φ_K mit der Normabbildung kommutiert. Für ein Ideal $\mathfrak{a}$, kann man die Norm definieren als

$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(H_K/F)} \sigma(\alpha) = \mathfrak{b}\mathcal{O}_K$$

wobei $\mathfrak{b}$ ein Ideal von F ist. Das Ideal $\mathfrak{b}$ von F nennt man nun die Norm von $\mathfrak{a}$ und wir schreiben sie als $\mathcal{N}\mathfrak{a}$. Also können wir setzen

$$\mathcal{N}([\mathfrak{a}]) = [\mathcal{N}(\mathfrak{a})]$$

und wir definieren damit die Normabbildung $\mathcal{N} : Cl(K) \to Cl(F)$.

Wenn H_F/F die maximal unverzweigte abelsche Erweiterung ist, dann, da H_K/K eine unverzweigte abelsche Erweiterung ist von K ist, gilt $H_F K \subset H_K$. Also gilt insbesondere, $H_F \subseteq H_K$ und wir können eine natürliche Restriktionsabbildung definieren

$$\begin{aligned} \iota : \mathrm{Gal}(H_K/K) &\to \mathrm{Gal}(H_F/F) \\ \sigma &\mapsto \sigma_{|H_F} \end{aligned}$$

Wir haben das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Cl(K) & \xrightarrow{\Phi_K} & \mathrm{Gal}(H_K/K) \\ \big\downarrow N & & \big\downarrow \iota \\ Cl(F) & \xrightarrow{\Phi_F} & \mathrm{Gal}(H_F/F). \end{array}$$

4.3 Idealklassengruppen von zyklotomischen $\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen

Sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$, p eine ungerade Primzahl und wir nehmen man $\mu_p \subseteq K$, also hat K auch keine reelle Stelle. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$K_n = K(\mu_{p^n}) \text{ und } K_\infty = \bigcup_{n>0} K_n.$$

Es gilt natürlich wieder $\Gamma := \mathrm{Gal}(K_\infty/K) \cong \mathbb{Z}_p$ und diese Erweiterung wird zyklotomische $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung genannt.

Wenn wir nun mit A'_{K_n} die Untergruppe aller Elemente bezeichnen deren Ordnung teilerfremd zu p ist erhalten wir

$$Cl(K_n) = A_{K_n} \oplus A'_{K_n}.$$

Zudem wollen wir eine Körpererweiterung deren Grad eine p-Potenz ist als *p-Erweiterung* bezeichnen.

Wir bezeichnen nun die maximal unverzweigte abelsche p-Erweiterung von K_n mit L_n und die maximal unverzweigte abelsche Erweiterung von K_n mit $\mathcal{L}_n$. Also erhalten wir mit der Reziprozitätsabbildung der Klassenkörpertheorie den Isomorphismus

$$\Phi_{K_n} : Cl(K_n) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}(\mathcal{L}_n/K_n).$$

Wenn wir nun mit L'_n die größte unverzweigte abelsche Erweiterung von K_n bezeichnen deren Grad teilerfremd zu p ist erhalten wir

$$\mathrm{Gal}(\mathcal{L}_n/K_n) = \mathrm{Gal}(L_n/K_n) \times \mathrm{Gal}(L'_n/K_n)$$

Wenn wir nun die zwei Zerlegungen oben vergleichen erhalten wir den Isomorphismus

$$\Phi_{K_n} : A_{K_n} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}(L_n/K_n)$$

induziert durch die Reziprozitätsabbildung der Klassenkörpertheorie.

Für $m > n$, betrachten wir die Normabbildung $N : Cl(K_m) \to Cl(K_n)$. Da $\mathcal{N}(A_{K_m}) \subseteq A_{K_n}$ gilt können wir definieren $\mathcal{N} : A_{K_m} \to A_{K_n}$.

Wenn wir nun zudem $\iota : \mathrm{Gal}(L_m/K_m) \to \mathrm{Gal}(L_n/K_n)$ durch $\sigma \mapsto \sigma_{|L_n}$ erhalten wir mit oben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_{K_m} & \xrightarrow{\Phi_{K_m}} & \mathrm{Gal}(L_m/K_m) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{N}} & & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\ A_{K_n} & \xrightarrow{\Phi_{K_n}} & \mathrm{Gal}(L_n/K_n). \end{array}$$

Wir können also den projektiven Limes nehmen, $X = \varprojlim_{\mathrm{Norm}} A_{K_n}$. Setzen wir zudem $L_\infty = \bigcup_n L_n$, also das Kompositum aller unverzweigten abelschen p-Erweiterungen von K_∞. Da $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty) = \varprojlim_n \mathrm{Gal}(L_n/K_n)$, bekommen wir einen Isomorphismus

$$\Phi : X \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty),$$

in dem wir den projektiven Limes über Φ_{K_n} nehmen. Da Φ_{K_n} mit der Wirkung von $\mathrm{Gal}(K_n/K)$ kommutiert, ist Φ_{K_n} ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K_n/K)]$-Moduln. Also ist Φ ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/K)]]$-Moduln. Setze $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$.

Dann sagt ein Theorem von Iwasawa:

Theorem 4.4. *S ist ein endlich-erzeugter Λ-Torsionsmodul.*

Also macht es für diesen Modul Sinn die Invarianten $\lambda(X)$, $\mu(X)$ und das Ideal $\mathrm{char}(X)$ von Λ zu definieren.

References

[CS06] J. Coates and R. Sujatha. *Cyclotomic fields and zeta values*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Gre] Ralph Greenberg. Topics in Iwasawa Theory. https://sites.math.washington.edu/ greenber/book.pdf.

[KKS11] Kazuya Kato, Nobushige Kurokawa, and Takeshi Saito. *Number theory. 2*, volume 240 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. Introduction to class field theory, Translated from the 1998 Japanese original by Masato Kuwata and Katsumi Nomizu, Iwanami Series in Modern Mathematics.

[KKS12] Nobushige Kurokawa, Masato Kurihara, and Takeshi Saito. *Number theory. 3*, volume 242 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. Iwasawa theory and modular forms, Translated from the Japanese by Masato Kuwata, Iwanami Series in Modern Mathematics.

[Kle15] Sören Kleine. *A new approach to the investigation of Iwasawa invariants*. PhD thesis, 2015.

[Neu99] Jürgen Neukirch. *Algebraic number theory*, volume 322 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, with a foreword by G. Harder.

[Neu13] Jürgen Neukirch. *Class field theory*. Springer, Heidelberg, 2013. The Bonn lectures, edited and with a foreword by Alexander Schmidt, Translated from the 1967 German original by F. Lemmermeyer and W. Snyder, Language editor: A. Rosenschon.

[NSW08] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg. *Cohomology of number fields*, volume 323 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2008.

[Was97] Lawrence C. Washington. *Introduction to cyclotomic fields*, volume 83 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.