Der Turm von Hanoi *

Andreas M. Hinz

Es wird erzählt, daß im großen Tempel von Benares, unter der Kuppel, die den Mittelpunkt der Welt markiert, in eine horizontale Bronzeplatte drei diamantene Nadeln vertikal eingelassen sind, jede eine Elle lang und so dick wie der Körper einer Biene. Auf der ersten dieser Nadeln hat der Schöpfer am Beginn der Zeiten vierundsechzig in ihrer Mitte durchbohrte, kreisförmige Scheiben aus purem Gold aufgereiht, die größte zuunterst. Das ist der Turm des Brahma. *Seitdem sind Priester Tag und Nacht damit beschäftigt, Scheibe für Scheibe von einer Nadel auf die andere zu versetzen, ohne dabei die* göttliche Regel *zu verletzen, niemals eine größere auf eine kleinere Scheibe zu legen. Wenn alle Scheiben auf der dritten Nadel aufgereiht sind, werden der Turm und die Brahmanen zu Staub zerfallen, und das wird das Ende der Welt sein.*

Kann das in dieser Legende enthaltene Rätsel um das Alter und den Bestand der Welt durch *wissenschaftliche Methoden* gelöst werden? Führt diese Lösung zu effizienten *Algorithmen* und interessanten *mathematischen Strukturen*? Im folgenden soll gezeigt werden, daß all diese Fragen zu bejahen sind.

Um herauszufinden, ob die Brahmanen ihre Aufgabe überhaupt erfüllen können, wird man sich der klassischen Methode *divide et impera* bedienen und versuchen, das Problem in weniger komplexe Teilprobleme aufzulösen und diese dann der Reihe nach (*sequentiell*) oder nebeneinander (*parallel*) in Gestalt einer Vorschrift für endlich viele Einzelhandlungen, also eines *Algorithmus*, abzuarbeiten. Dabei fällt auf, daß die größte Scheibe erst dann bewegt werden kann, wenn alle anderen von der Ausgangsposition auf eine andere Nadel versetzt worden sind. Das Problem für 64 Scheiben ist also gelöst, wenn das gleichartige Problem für 63 Scheiben gelöst ist. Durch analoge Zurückführung (*Rekursion*) auf immer kleinere Scheibenzahlen gelangt man schließlich zu dem Fall, eine (oder garkeine) Scheibe aus dem Weg räumen zu müssen, was letztlich lösbar ist.

Mit dem Ende der Welt ist also zu rechnen — aber wann? Auch hierauf gibt der gerade beschriebene *rekursive Algorithmus* eine erste Antwort. Da man nach der Bewegung der größten Scheibe alle anderen von der Zwischenposition auf die Zielnadel bringen muß, braucht man für die 64 Scheiben doppelt so viele Züge wie für 63 Scheiben plus einen. Das heißt aber, die größte Scheibe wird einmal, die zweitgrößte zweimal, die drittgrößte viermal bewegt u.s.w.. Insgesamt ist die Zahl der Scheibenbewegungen also genauso groß wie die Anzahl der Weizenkörner, die der legendäre Erfinder des Schachspiels, Sissa ben Dahir, vom indischen König Shirhâm als Belohnung eingefordert hat, nämlich 18446744073709551615. Geht man davon aus, daß die Brahmanen eine Scheibe pro Sekunde versetzen, so wären sie erst nach mehr als 500 Milliarden Jahren am Ziel, ins Nirwana einzugehen!

Oder geht es doch schneller? Können wir durch Beobachtung der Priester feststellen, ob sie bestmöglich arbeiten? Können wir daran, wie weit die Verteilung der Scheiben schon fortgeschritten ist, ermessen, wie lange sie schon am Werk sind, d.h. wie alt das Universum ist und damit — für uns noch wichtiger — wie lange es noch Bestand haben wird? Hier sind wir, wie so oft in unserem täglichen

Leben, an einer Stelle angelangt, wo wir ohne die über Jahrtausende bewährte wissenschaftliche Methode einer *mathematischen Modellierung* des Problems nicht mehr weiterkommen.

1 Mathematisches Modell

Ein Modell ist eine Darstellung eines realen Objektes, die z.B. durch Skalierung oder Weglassung von überflüssigen Einzelheiten spezielle Eigenschaften einer Untersuchung zugänglich macht. So stellt das 1883 von dem französischen Mathematiker Édouard Lucas auf den Markt gebrachte Spiel *Der Turm von Hanoi* durch die Verwendung des weniger edlen Materials Holz und die Beschränkung auf acht Scheiben eine vulgäre Version des Turms von Brahma dar, an der die obigen Fragestellungen händisch studiert werden können. Einen weiteren Schritt bildet der Übergang zu einem *mathematischen Modell*, wo durch Abstraktion alle interessierenden Eigenschaften und Fragestellungen in mathematische Objekte und Aussagen übersetzt werden. Letztere werden sodann einer mathematischen Analyse unterzogen, deren Ergebnisse wiederum am realen Objekt interpretiert werden können.

In unserem Fall bezeichnen wir mit der natürlichen Zahl n die Anzahl der Scheiben, die wir in ansteigender Größe von 1 bis n durchnumerieren. Wenn wir dann noch die Stangen, wie die Nadeln beim Turm von Hanoi heißen, mit den Adressen 0, 1 und 2 belegen, so ist jeder regelgerecht erreichbare *Zustand* durch ein n-Tupel $s \in \{0,1,2\}^n$ eindeutig bestimmt, wenn s_d die Stange ist, auf der sich Scheibe $d \in \{1,\ldots,n\}$ befindet, denn die Anordnung der Scheiben auf einer Stange ist durch die göttliche Regel festgelegt.

Für die Analyse dieses Modells steht der gesamte Apparat der Mathematik zur Verfügung, wie z.B. die *vollständige Induktion*, ein mathematisches Beweisprinzip, das auf die oben geschilderte Methode der Rekursion zurückgeht: Wenn man weiß, daß eine Aussage $A(n)$ über die natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ für $n = 0$ zutrifft, und wenn man außerdem stets von $A(n)$ auf $A(n+1)$ schließen kann, so ist die Aussage für alle n wahr. In unserem Beispiel ist $A(n)$ die Aussage „das Problem des Turms von Hanoi mit n Scheiben besitzt eine Lösung“. Unter allen Lösungen muß es außerdem (mindestens) eine mit minimaler Zugzahl geben. Neben diesen *Existenzaussagen* interessieren aber auch *Eindeutigkeitsaussagen*. Wenn $A(n)$ die Aussage „für n Scheiben gibt es genau eine Lösung minimaler Länge“ ist, so ist $A(0)$ klar, und in einer (minimalen) Lösung für $n+1$ Scheiben muß die größte mindestens einmal bewegt werden. Vor dem ersten und nach dem letzten Zug von $n+1$ muß jeweils ein Turm von n Scheiben versetzt werden, so daß für die minimale Länge $\mu(n+1) \geq 2\mu(n)+1$ gilt. Wie die rekursive Lösung zeigt, ist aber auch $\mu(n+1) \leq 2\mu(n)+1$, so daß sich die größte Scheibe genau einmal bewegt. Aus $A(n)$ folgt also $A(n+1)$. Darüber hinaus erhalten wir neben einer solchen *qualitativen* Aussage wieder durch vollständige Induktion auch eine *quantitative*, nämlich $\mu(n) = 2^n - 1$.

Für $n = 64$ ergibt sich also tatsächlich die obige (beruhigend) hohe Zugzahl. Doch haben die Priester überhaupt eine *effiziente*, d.h. die minimale Zugzahl realisierende Lösung? Ideal, weil wenig fehleranfällig, wäre eine Anweisung, die Schritt für Schritt vorgibt, also ein *iterativer Algorithmus*. Es wird nun nicht mehr überraschen, daß auch hier die vollständige Induktion zu Hilfe kommt. Man kann damit nämlich zeigen, daß abwechselnd immer die kleinste und eine andere Scheibe bewegt werden muß. Dabei läuft die kleinste Scheibe zyklisch, und die anderen Züge sind durch die göttliche Regel festgelegt. Es sei noch angemerkt, daß die so entstehende *Folge* der Scheibennummern unter der Annahme unendlich vieler Scheiben, nämlich $1,2,1,3,1,2,1,4,1,2,1,3,1,2,1,5,1,2,\ldots$ interessante Eigenschaften hat, wie z.B. *streng quadratfrei* zu sein, und ihr Muster sich wiederfindet im chinesischen Orakel *Yì Jīng* und bei der Datenübertragung (*Gray-Code*). Auch ein *paralleler Algorithmus* kann angegeben werden, d.h. die $2^n - 1$ Züge können unabhängig voneinander bestimmt werden. Um die anderen in der Einleitung angesprochenen Fragen, sogenannte *inverse Probleme*, untersuchen zu können, ist es unabdingbar, die Struktur des Modells zu präzisieren und in eine passende *mathematische Struktur* einzubetten.

2 Mathematische Strukturen

Eine vollständige mathematische Repräsentation des Turms von Hanoi gelingt in Gestalt eines *Zustandsgraphen*. Ein (einfacher, ungerichteter) *Graph* ist ein Paar (V, E) bestehend aus der *Eckenmenge* V und der *Kantenmenge* E; hierbei sind die Elemente von E ungeordnete Paare $\{v_1, v_2\}$ von Elementen von V. (Die *lingua franca* der modernen Mathematik ist das Englische; deshalb lehnen sich Notationen meist an die englischen Ausdrücke an, hier z.B. V für *vertices* und E für *edges*.) Setzen wir $V = \{0, 1, 2\}^n$ und lassen $\{s, t\}$ genau dann zu E gehören, wenn t aus s durch eine legale Bewegung einer Scheibe hervorgeht, so haben wir den *Hanoigraphen* H_n vor uns. Er besitzt eine besonders schöne Darstellung in der Ebene (man spricht von einem *planaren* Graphen), die man wieder iterativ gewinnt; für ein Beispiel ($n = 3$) siehe Abbildung 1.

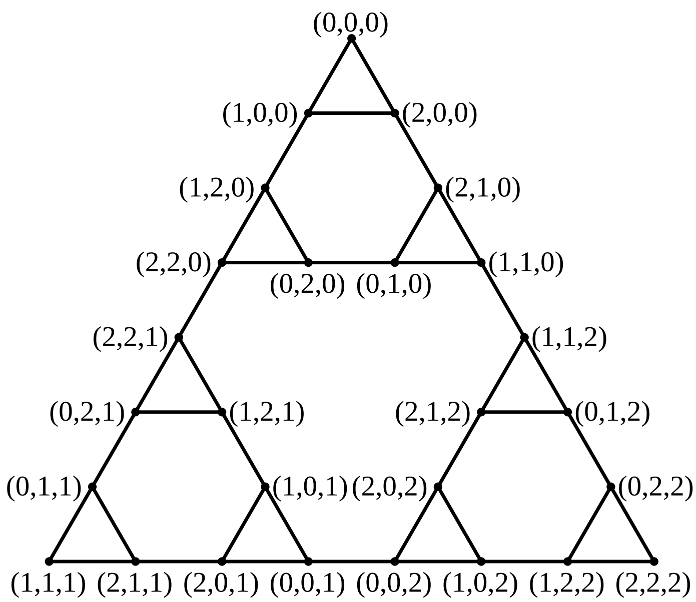

Abbildung 1: Hanoigraph H_3

Ein erster Blick auf diesen Graphen zeigt, daß er *zusammenhängend* ist, d.h. jede Ecke kann mit jeder anderen durch einen *Weg*, d.h. eine endliche Abfolge von Kanten verbunden werden. Das bedeutet, daß nicht nur eine Abweichung vom rechten Weg, nämlich einer der Flanken des Dreiecks, korrigiert werden kann, sondern daß sogar Anfangs- *und* Endstellung des Turms von Hanoi beliebig vorgegeben werden können. Für zwei Zustände $s, t \in \{0, 1, 2\}^n$ des Turms von Hanoi ist damit auch der *Abstand* $\mu(s, t)$ als die Minimalzahl von Kanten eines s und t verbindenden Weges definiert. Wie oben sieht man, daß $\mu(s, t) \leq 2^n - 1$, d.h. $2^n - 1$ ist der *Durchmesser* des Graphen H_n.

Es gibt auch einen „längsten“ Weg von einem *perfekten* Zustand, wo alle Scheiben auf ein und derselben Stange liegen, zu einem anderen perfekten Zustand, d.h. einen sogenannten *Hamiltonweg*, der jede Ecke von H_n genau einmal enthält. Außerdem ist H_n *hamiltonsch*, d.h. er enthält einen Hamiltonweg, der durch eine weitere Kante zur Ausgangsecke (einem perfekten Zustand) geschlossen werden kann. H_n ist aber, für $n > 1$, nicht *eulersch*, d.h. er enthält keinen geschlossenen Weg, der jede Kante des Graphen genau einmal durchläuft, da es Ecken gibt, deren *Grad* (d.i. die Anzahl der einmündenden Kanten) ungerade ist.

Eine besonders hilfreiche mathematische Methode ist das Aufsuchen von *Invarianten*. Hier machen wir die Beobachtung, daß die Summe der Abstände von den drei perfekten Zuständen für alle Zustände $s \in \{0,1,2\}^n$ gleich ist:

$$\mu(s,0) + \mu(s,1) + \mu(s,2) = 2\,(2^n - 1)\,. \tag{1}$$

Das folgt aus der Tatsache, daß sich mit jeder Scheibenbewegung der Abstand zu einem der perfekten Zustände um 1 verringert, zu einem anderen um 1 erhöht und zum dritten gleich bleibt. Die Formel (1) hat zahlreiche Konsequenzen. So ist für jeden Zwischenzustand auf dem kürzesten Weg von 0 nach 2 der Abstand zu 1 gleich $2^n - 1$. Wie kann man aber $\mu(s,j)$ $(j \in \{0,1,2\})$ bestimmen? Dazu läßt man sich von den Erfahrungen mit dem Spezialfall wo auch s perfekt ist leiten. Wie dort bewegt sich die größte Scheibe direkt von s_n nach j, falls nicht schon $s_n = j$ ist. Vor diesem Zug müssen die $n-1$ kleineren Scheiben nach Stange $3 - s_n - j$ gebracht werden, nach dem n-Zug wandert dieser $(n-1)$-Turm nach j. Ausgehend von $\sigma_n = j$ definiert man daher rekursiv das erste Ziel σ_d der Scheibe $d \in \{1, \ldots, n-1\}$ durch

$$\sigma_d \quad = \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{d+1}, & \text{wenn } \sigma_{d+1} = s_{d+1} \\ 3 - \sigma_{d+1} - s_{d+1}, & \text{wenn } \sigma_{d+1} \neq s_{d+1} \end{array} \right\};$$

der Abstand von s nach j ist dann gegeben durch

$$\mu(s,j) = \sum_{d=1}^{n} (\sigma_d \neq s_d) \cdot 2^{d-1}. \tag{2}$$

(Für eine Aussage A ist $(A) = 1$, wenn A wahr ist, und $(A) = 0$, wenn A falsch ist.) Somit sind die Priester genau dann auf dem rechten Weg von 0 nach 2, wenn $\sigma_d \neq s_d$ für alle $d \in \{1, \ldots, n\}$ und $j = 1$ gilt. Mehr noch, durch Berechnung aller σ_d für $j = 0$ erhält man aus (2) das Alter des Universums und mit (1) auch noch die Zeit bis zum Untergang der Welt. Es sei den Lesern überlassen zu überlegen, ob und gegebenenfalls wie diese Werte sekundengenau bestimmt werden können, wenn die Momentaufnahme der Nadeln und des diensthabenden Brahmanen diesen mit einer Scheibe in der Hand zeigt.

Bei der Frage nach einer effizienten Berechnung von $\mu(s,t)$ für beliebige $s,t \in \{0,1,2\}^n$ stößt man auf ein erstes teilweises Versagen der rekursiven Methode. Es ist nämlich keineswegs mehr sicher, daß die größte Scheibe bei einem Minimalweg von s nach t höchstens einmal bewegt wird! Die Leser mögen sich das anhand des Graphen in Abbildung 1 klarmachen. Für die Entscheidung, ob Scheibe n, falls nicht schon $s_n = t_n$ ist, nur einmal, von s_n nach t_n, bewegt werden muß oder zweimal, von s_n über $3 - s_n - t_n$ nach t_n, bleibt einem nichts anderes übrig, als mit Hilfe von (2) für beide Alternativen die Gesamtschrittzahl zu bestimmen und das Minimum auszuwählen; jedenfalls ist (mir) keine effizientere Lösung bekannt. Noch schwieriger gestaltet sich das Problem, wenn der Ausgangszustand s *illegal* ist, d.h. eine beliebige Verteilung der $n \geq 2$ Scheiben auf die drei Stangen darstellt. Hier haben bislang nur rein *kombinatorische* Methoden Ergebnisse erbracht, z.B. daß dann $\mu(s,t) \leq 2^n - 1 + 2^{n-2}$ gilt.

Sind für den Einzelfall keine allgemeinen Aussagen erreichbar, so greift man zu *statistischen Methoden*. So erhält man leicht aus (1) durch Aufaddieren über alle $s \in \{0, 1, 2\}^n$, daß der *mittlere Abstand* zu einem festen perfekten Zustand gleich $\frac{2}{3}(2^n - 1)$ ist. Die entsprechende Aussage für beliebige Anfangs- und Endstellungen ist ungleich schwieriger zu erhalten; das Ergebnis soll aber ob seiner beeindruckenden Gestalt hier nicht vorenthalten werden:

$$\frac{466}{885}\,2^n - \frac{1}{3} + \left(\frac{12}{59} + \frac{18}{1003}\sqrt{17}\right)\left(\frac{5+\sqrt{17}}{18}\right)^n - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{12}{59} - \frac{18}{1003}\sqrt{17}\right)\left(\frac{5-\sqrt{17}}{18}\right)^n . \quad (3)$$

Es gehört zur Arbeitsweise der Mathematiker, die Analyse des Modells über die ursprüngliche Fragestellung hinaus auszudehnen. So wie früher die iterative Fortsetzung des klassischen Minimalverfahrens beim Turm von Hanoi ins Unendliche zu interessanten Objekten führte, liegt es nun nahe, auch für die Graphen H_n den Grenzübergang $n \to \infty$ durchzuführen. Dabei ergeben sich durch das mathematische Prinzip der *Isomorphie*, also der Gleichgestaltigkeit von Strukturen, so verschiedene Objekte wie das *Pascalsche Dreieck mod 2* und das *Sierpiński-Dreieck*; vgl. Abbildung 2.

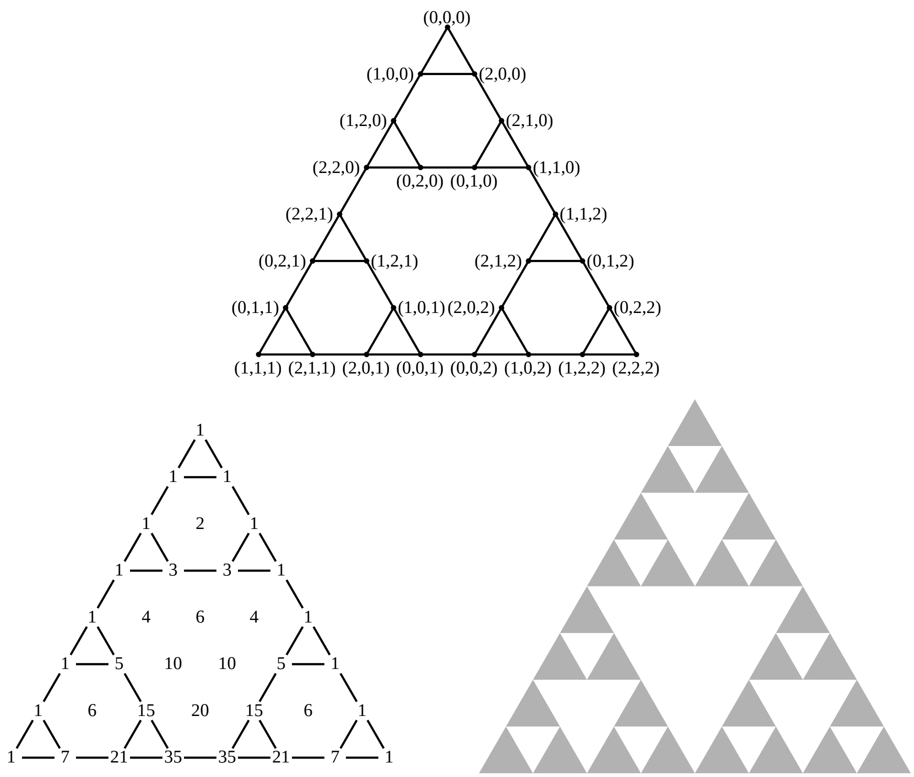

Abbildung 2: Isomorphe Graphen

Bei letzterem handelt es sich um die Punktmenge die übrigbleibt, wenn man ausgehend von einem abgeschlossenen gleichseitigen Dreieck das offene Mittendreieck entfernt und mit den verbleibenden Unterdreiecken ebenso verfährt, *ad infinitum*. Das Sierpiński-Dreieck ist ein Beispiel für die mathematische Struktur eines *selbstähnlichen Fraktals*. Selbstähnlich deshalb, weil die Unterdreiecke, in ihrer Seitenlänge verdoppelt, identisch sind mit dem Gesamtgebilde; Fraktal deshalb, weil diese Streckung zu einer Verdreifachung des (mathematisch zu präzisierenden *Maßes* des) Objekts führt, die *fraktale Dimension* also $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$ beträgt, eine Zahl, die echt zwischen 1 und 2 liegt.

Versteht man unter dem Abstand auf dem Sierpiński-Dreieck (mit Seitenlänge 1) den kürzesten Weg, der zwei Punkte desselben verbindet ohne das Gebilde zu verlassen, so stellt man durch Rückgriff auf das entsprechende Ergebnis bei den Graphen H_n fest, daß der mittlere Abstand von einer der Ecken des Dreiecks $\frac{2}{3}$ beträgt. Aufgrund der Selbstähnlichkeit könnte man auf folgende Argumentation zur Bestimmung des mittleren Abstands δ zweier beliebiger Punkte im Sierpiński-Dreieck verfallen: Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ liegen die beiden Punkte in ein und demselben Unterdreieck, wo der mittlere Abstand $\frac{\delta}{2}$ beträgt. Der mittlere Abstand der übrigen Paare setzt sich zusammen aus den mittleren Abständen zu dem die beiden Unterdreiecke verbindenden Punkt, ist also nach obigem gleich $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$. Insgesamt ergibt sich $\delta = \frac{1}{3} \cdot \frac{\delta}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$, also $\delta = \frac{8}{15}$. Der wahre Wert, den man aus Formel (3) durch den Grenzübergang $n \to \infty$ erhält, ist $\delta = \frac{466}{885}$. (Dieses *asymptotische* Argument ist ein schönes Beispiel für die Zusammenhänge zwischen *diskreter* und *kontinuierlicher* Mathematik.) Aufmerksame Leser werden den Fehler in der obigen Herleitung erkannt haben.

3 Ein offenes Problem

Zum Abschluß kommen wir noch einmal auf das Problem des Turms von Brahma zurück: Was wäre wohl geschehen, wenn jemand, z.B. der Teufel persönlich, den Priestern eine weitere Nadel zur Verfügung gestellt hätte? Zwar macht man sich schnell klar, daß es mit der Welt weitaus früher zu Ende gegangen wäre, doch es wird vielleicht verwundern, daß die Frage *wie* schnell bis heute unbeantwortet ist! Der Grund liegt darin, daß die Rekursion von $n+1$ auf n Scheiben hier nicht zu einem gleichartigen Problem führt: Um Scheibe $n+1$ zu bewegen, müssen die n kleineren nicht unbedingt auf einer, sondern lediglich auf zwei Stangen verteilt werden. Eine *heuristische Strategie* besteht darin, zunächst die $k \in \{1, \ldots, n\}$ kleinsten Scheiben auf eine dieser Zwischenstangen zu versetzen (Rekursion) und sodann die $n-k$ nächsten Scheiben auf die zweite Zwischenstange zu bringen mit dem bekannten Minimalalgorithmus für drei Stangen (eine ist ja nun wegen der göttlichen Regel tabu!). Man kann dann noch über k optimieren. Nach diesem Verfahren sind für die Versetzung des n-Turmes bei vier Stangen $\left(n - 1 - \frac{l(l-1)}{2}\right) \cdot 2^l + 1$ Züge nötig, worin $\frac{l(l+1)}{2} < n \leq \frac{(l+1)(l+2)}{2}$, $l \in \mathbb{N}_0$. Für 64 Scheiben ($l = 10$) hätten die Brahmanen nur 18433 Züge machen müssen, die Welt hätte somit weniger als 6 Stunden bestanden! Mit Hilfe einer *Computersimulation*, also mittels *experimenteller Mathematik*, wurde die Minimalität der obigen Zugzahl bestätigt für $n \in \{0, \ldots, 17\}$. Ein allgemeiner Beweis für $n \in \mathbb{N}_0$ steht aber noch aus.

4 Literatur

- zur diskreten Mathematik: M. Aigner, Diskrete Mathematik, 4. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 2001.
- zu Graphen: R. Diestel, Graphentheorie, 2. Auflage, Springer, Berlin, 2000.
- zum Sierpiński-Dreieck: I. Stewart, Four Encounters with Sierpiński's Gasket, Mathematical Intelligencer 17(1) (1995), 52–64.
- zum Turm von Hanoi: A. M. Hinz, The Tower of Hanoi, in: Algebras and Combinatorics, Springer, Singapore, 1999, 277–289.