

# Graphen

**Vorlesung Universität München Wintersemester 2007/8**

**Andreas M. Hinz**

**Copyright © Andreas M. Hinz, 2008**

**All rights reserved**



## Vorwort

Im Jahr 1735 präsentierte Leonhard Euler seine Lösung zu einem Problem, das die Einwohner und Besucher der Stadt Königsberg bis dahin heiß beschäftigt hatte, nämlich die Frage, ob es wohl möglich sei, die sieben Brücken über den Fluß Pregel auf einem Spaziergang je genau einmal zu überqueren. Euler bewies die Unmöglichkeit dieses Unterfangens, allein das schon für Nicht-Mathematiker etwas besonderes, indem er die topographische Situation Königsbergs in Bezug auf die Fragestellung mathematisch modellierte in Gestalt eines, wie man seit James Joseph Sylvester sagt, *Graphen*. Diese und ihre Spezialfälle, die *Bäume*, tauchen seitdem in zahlreichen Modellen als Stamm- und Entscheidungsbäume, Netzpläne von Verkehrssystemen, Strukturformeln chemischer Verbindungen, in elektr(on)ischen Schaltungen usw. auf.

Ausgangspunkt unseres Interesses war eine moderne Anwendung in der Neuropsychologie, wo Denkprozesse analysiert werden können durch Beobachtung von Testpersonen bei der Lösung von strategischen Solitärspielen. Das berühmteste davon, den *Turm von Hanoi*, brachte der französische Zahlentheoretiker Édouard Lucas 1883 unter dem Pseudonym N. Claus de Siam heraus, das seinem Untertitel eines "wahrhaftigen Kopfzerbrechers" seit numehr 125 Jahren alle Ehre macht. Lucas hatte das Spiel aus dem *Baguenaudier*, den Chinesischen Ringen, heraus entwickelt, um das binäre Zahlssystem zu veranschaulichen. Letzteres führte er, hierin Leibniz folgend, auf den legendären chinesischen Kaiser Fu Xi zurück, dem im 3. Jahrtausend vor unserer Zeitrechnung die acht *Trigramme* in der Rückenzeichnung einer Schildkröte erschienen sein sollen. Mit diesen ersten *natürlichen Zahlen*, der Menge  $[8]_0$  in unserer Notation (s. u.), war der Grundstein der *diskreten Mathematik* gelegt, die sich mit endlichen mathematischen Strukturen befaßt. Eine solche stellt auch der *Zustandsgraph* dar, durch den man den Turm von Hanoi und seine Varianten wie den *Turm von London* repräsentieren und auf dem man das Löseverhalten der Probanden studieren kann. Diese *Turm-Graphen*, zu denen sich noch die in anderem Zusammenhang entstandenen *Sierpiński-Graphen* gesellen, sollen das Leitmotiv der vorliegenden Vorlesung bilden, anhand dessen die Fachbegriffe entwickelt und die Aussagen der *Graphentheorie* illustriert werden können. Für die Anwendung in der medizinischen Praxis, aber auch bei der Herausarbeitung mathematischer Aussagen, spielen in zunehmendem Maße moderne Rechengeräte eine Rolle, deren Ein-

satzfähigkeit wiederum auf endlichen Rechenvorschriften, den *Algorithmen*, beruht, deren Analyse ebenfalls Gegenstand der diskreten Mathematik geworden ist. Es soll daher auch hier großer Wert auf die algorithmische Realisierbarkeit mathematischer Lösungsverfahren gelegt werden. Die Vorlesung kann daher sowohl als eine Einführung in die Hauptzweige der diskreten Mathematik, wie auch als Bereitstellung der mathematischen Grundlagen der modernen Theorie des Turms von Hanoi verstanden werden. Da letztere sich in den vergangenen Jahren immermehr in Fragen zu den zugehörigen *Hanoi-Graphen* konzentriert hat, wurde in dieser Vorlesung den Graphen eine gegenüber einer früheren Version [IV.1] herausragendere Stellung eingeräumt.

Vertrautheit mit elementarer Aussagenlogik und Mengenbegriffen wurde vorausgesetzt, auf subtilere und andernorts oft verschwiegene Details wie dem Rekursionssatz wurde aber eingegangen.

Der Aufbau der Vorlesung ist wie folgt. In Kapitel 0 wird anhand *einleitender Beispiele* in die Thematik eingeführt. Zur Zählproblematik gehört Fibonaccis berühmte Kaninchen-Aufgabe (Beispiel 0.1). In Abschnitt 0 werden *topologische Fragestellungen* erörtert wie das bereits erwähnte Königsberger Brücken-Problem und das als früheste Anwendung von Graphen auf mathematische Spiele anzusehende Icosian Game von Hamilton. Hierzu gehören auch das Erbteilungsproblem von Möbius, das Wasserwerk-, Gaswerk-, Elektrizitätswerk-Problem und die berühmte Vier-Farben-Vermutung. Anderer Natur sind die in Abschnitt 1 angesprochenen *metrischen Fragestellungen*, die sich in 1.0 anhand der *Chinesischen Ringe* erläutern lassen, deren Lösung in Proposition 1.1 und Korollar 1.2 bereits ohne formalen Aufwand aber mit Hilfe der vollständigen Induktion gelingt und so interessante Objekte wie die Gros-Folge und den Gray-Code zu Tage fördert. Diese Überlegungen bilden die Grundlage der mathematischen Untersuchung des *Turms von Hanoi*, der in 1.1 vorgestellt wird. Nach dieser informellen Einführung endet Kapitel 0 mit dem Abschnitt 2 zur *formalen Definition der Graphen* (Definition 2.0) und ihrer Abarten.

Der Präzisierung der formalen Grundlagen der Graphentheorie ist Kapitel 1 über *Mengen und Zahlen* gewidmet. Abschnitt 3 über *Mengen* geht in 3.1 zunächst auf *Zerlegungen* ein, die in Definition 3.1 eingeführt und in Theorem 3.3 in 3.2 über die *Gleichwertigkeit* mit den in Definition 3.2 unorthodox charakterisierten Äquivalenz-Relationen identifiziert werden. Die für unsere Zwecke wichtigste Äquivalenz-Relation ist die in Definition 3.4 eingeführte Isomorphie von Graphen, die zu der wichtigen Unterscheidung von nicht-indizierten

Graphen und indizierten Graphen führt. Eine weitere wichtige Äquivalenz-Relation führt im Abschnitt 4 über *Zahlen* in 4.1 auf den Begriff der *Anzahl*, der in Lemma 4.1 festgelegt wird. Eines der kuriosesten Hilfsmittel der Mathematik ist dabei das Schubfachprinzip des Theorems 4.2, dessen historische Wurzeln im Dunklen liegen. Obskur sind oft auch die Grundlagen der *Rekursion*, die in 4.2 mit Hilfe des Rekursionssatzes in Theorem 4.4 hergestellt werden. Um schließlich einen sinnvollen Abstandsbegriff auf Graphen zu haben, werden in 4.3 *metrische Räume* eingeführt. Der in Definition 4.5 gegebene Regelsatz für eine Metrik erscheint mir wesentlich natürlicher als die Standard-Definition auf geordneten Paaren. Über die Begriffe des Weges und seiner Länge in einem Graphen (Definition 4.6) gelangt man so in Lemma 4.7 zur Standardmetrik eines zusammenhängenden Graphen und zu seinem Durchmesser.

Ausgestattet mit diesen Grundbegriffen kann man sich in Kapitel 2 *speziellen Graphen* zuwenden, wozu zunächst in Abschnitt 5 die *Weg-, Kreis- und vollständigen Graphen* gehören. Anhand dieser einfachen Beispiele werden geschlossene eulersche Kantenzüge und hamiltonsche Kreise präzisiert, sowie weitere neue Begriffe eingeführt, darunter der eines endlichen Automaten, die chromatische Zahl und die Planarität (erster Versuch). Dazu kommen noch Klassen von Graphen wie die (vollständigen) bipartiten und die Sterne. Besonders wichtig sind aber die *Bäume*, denen sich Abschnitt 6 zuwendet. (Ich verdanke diesen Abschnitt in weiten Passagen meinem Kollegen Sandi Klavžar (Universität Maribor, Slowenien), der diesen Teil der Vorlesung [IV.1] im Rahmen des Sokrates-/Erasmus-Dozentenaustauschs übernommen hatte. Für die endgültigen Formulierungen und damit allfällige Fehler zeichne aber nur ich verantwortlich!) Der etwas gewagten Definition 6.0 folgen in 6.1 *grundlegende Eigenschaften von Bäumen* mit mehreren äquivalenten Charakterisierungen (Theoreme 6.2 und 6.5, sowie Korollar 6.3). *Eine weitere Charakterisierung von Bäumen*, sowie *aufspannende Bäume* treten in 6.2 auf. Dem Nachweis der Existenz aufspannender Bäume in zusammenhängenden (endlichen) Graphen in Theorem 6.7 folgt ein Ausflug in die nicht-konstruktive Theorie unendlicher Graphen mit dem Nachweis der Äquivalenz der Existenz aufspannender Bäume für alle unendlichen zusammenhängenden Graphen mit dem Auswahlaxiom, welches hier in zwei äquivalenten Formulierungen dargestellt und mit dem Zornschen Lemma in Verbindung gebracht wird. *Minimale aufspannende Bäume* werden in 6.3 mit dem Greedy-Algorithm erzeugt, der auch bei der Konstruktion quadrat-freier Folgen zum Einsatz kommt. In 6.4 geht es um *Wurzel-*

*bäume* (6.4.1) und *indizierte Bäume* (6.4.2) mit dem berühmten Satz von Cayley über die Anzahl indizierter Bäume (Theorem 6.13). Schließlich wird noch in 6.4.3 über *anmutige Bäume* die Graceful Tree Conjecture angesprochen und der Satz über die Zerlegung der Kantenmenge vollständiger Graphen ungerader Ordnung in isomorphe Kopien eines Baumes (Satz 6.16) bewiesen. Abschnitt 7 über *bipartite Graphen* ist insbesondere dem interessanten Thema der Paarung (Definition 7.0) gewidmet. Höhepunkt ist der Heiratsatz (Theorem 7.3), dessen abstrakter Beweis durch einen konstruktiven Algorithmus ergänzt wird.

. Abschnitt 8 ist der zentrale Abschnitt über *Turm-Graphen*, in dem zunächst in 8.1 eine *Analyse der Lösung zum klassischen TH-Problem* ( $\mathfrak{P}_0$ , perfekt nach perfekt) durchgeführt wird. Die dabei auftretende Olive-Folge der Züge führt über die Claus-Folge in 8.2 zu einer *Rückkehr zu quadratfreien Folgen* und schließlich in 8.3 zu einer *Rückkehr zu Graphen*. Hierbei werden der Zustandsgraph zum Turm von Hanoi als Hanoi-Graph eingeführt und dessen grundlegenden Eigenschaften hergeleitet. Auch Lucas' Zweites Problem mit irregulären Ausgangszuständen wird hier in Proposition 8.6 angesprochen, ebenso wie einige offene Probleme hierzu. Besonders viel weiß man über *metrische Eigenschaften der Hanoi-Graphen*  $H_3^n$ , die in 8.4 abgehandelt werden. Entscheidend für die *Lösung für*  $\mathfrak{P}_1$  (regulär nach perfekt) in 8.4.1 ist die Analyse der Zugzahl der größten Scheibe in Lemma 8.7, was zur eindeutigen Lösung für  $\mathfrak{P}_1$  führt (Proposition 8.8), die sich durch einen besonders eleganten endlichen Automaten, den ich einem Hinweis von Paul Stockmeyer zu verdanken habe, realisieren läßt. Für den Einsatz des Turms von Hanoi als Testinstrument in der (Neuro-)Psychologie ist eine genaue *Diskussion der Lösung für*  $\mathfrak{P}_1$  vonnöten, die in 8.4.2 durchgeführt wird. Hierzu gehört z. B. die Bestimmung des durchschnittlichen Abstands von einem perfekten Zustand in Korollar 8.11, was nebenbei zu einem interessanten Zusammenhang zu Pascals Arithmetischem Dreieck (Korollar 8.12) und dem Sierpiński-Dreieck führt. Die Frage nach dem durchschnittlichen Abstand auf diesem Fraktal läßt die Frage nach der *Lösung für*  $\mathfrak{P}_2$  (regulär nach regulär) aufkommen, der in 8.4.3 nachgegangen wird. Besonders kritisch ist dabei das Entscheidungs-Problem, ob in einer optimalen Zugfolge die größte Scheibe einmal oder zweimal läuft. Diese Frage wird mithilfe der zahlentheoretischen Folgen  $z_n$  (Definition 8.14) angegangen, die sich auch aus dem Stern-Brocot-Schema ergeben. Hiermit gelingt es, den Wiener-Index von  $H_3^n$  zu bestimmen und schließlich durch Grenzübergang den

mittleren Abstand auf dem Sierpiński-Dreieck. Weitere mathematische Herausforderungen bringt die Hinzunahme einer weiteren Stange, in 8.5.0 *des Teufels Nadel* genannt. Sie führt nämlich auf *Hanoi-Graphen zu höheren Basen* in 8.5, die in 8.5.1 definiert (Definition 8.17) und analysiert werden (Proposition 8.18).

Damit ist die Bühne bereitet für *spezielle Fragestellungen* bei Graphen, denen in Kapitel 3 nachgegangen wird. Hierzu gehört die *Planarität*, die in Abschnitt 9 in formal und topologisch einwandfreier Weise definiert wird (Definition 9.0) (in der Literatur keineswegs selbstverständlich, wo oft eine an die Anschauung appellierende Begriffsbestimmung gegeben wird). Ein Höhepunkt der topologischen Graphentheorie ist die Eulersche Formel für Polygone, deren Beweis hier aber nur für den planaren Fall und ohne topologische Subtilitäten (Jordanscher Kurvensatz) durchgeführt wird. Als unmittelbare Folgerung ergibt sich Euklids Aussage über die Anzahl der Platonischen Körper (Theorem 9.1). Auch der Nachweis der Nicht-Planarität der Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  gelingt nun (Korollar 9.3) ohne die Anschauung bemühen zu müssen. Der Satz von Kuratowski (Theorem 9.4; ohne Beweis) ist die Grundlage für Algorithmen, die Graphen auf Planarität hin untersuchen. Auch die Frage nach *Färbungen*, die in Abschnitt 10 angesprochen wird, kann mit Algorithmen untersucht werden. Berühmtestes Beispiel für den Einsatz von Computern beim Beweis mathematischer Aussagen ist für die *Eckenfärbung* in 10.1 der Vierfarbensatz. Wir haben hier auf einen Beweis verzichtet und beweisen stattdessen den Fünffarbensatz (Satz 10.1). Ein Eckenfärbungsalgorithmus, der nicht unbedingt eine minimale Färbung ergibt, beruht auf der greedy Methode. Hierbei ergibt sich auch ein Zusammenhang zu den populären Sudoku-Rätseln. Besonders wichtig für die *Kantenfärbung* in 10.2 ist das Theorem von Vizing (ohne Beweis), nach dem für den chromatischen Index eines Graphen nur zwei Werte in Frage kommen und auch tatsächlich auftreten (Beispiel 10.3). Für bipartite Graphen kann dieses Klasse I/II-Entscheidungsproblem zugunsten der Klasse I gelöst werden (Satz 10.4), ebenso für alle nicht-vollständigen Hanoi- und Sierpiński-Graphen, wo die Frage bis 2007 offen war; das Ergebnis wird hier (ohne Beweis) erstmals in Satz 10.5 angekündigt. Eine Entscheidung zwischen zwei Klassen ist auch bei der Frage der *Totalfärbung* in 10.3 vonnöten, wobei hier die Dichotomie bislang nur eine Vermutung (von Vizing und Behzad) darstellt. Für Sierpiński-Graphen ist die Frage geklärt, für Hanoi-Graphen noch nicht vollständig. Offene Fragen gibt es auch im Zusammenhang mit *metrischen Eigenschaften* in Abschnitt 11, insbe-

sondere zu *metrischen Eigenschaften von  $H_4^n$* . Unter den in 11.0 diskutierten Problemen ragt neben Fragen und einer Vermutung zur Anzahl der Bewegungen der größten Scheibe in Minimallösungen (Beispiel 11.1) die Frame-Stewart-Conjecture über die Länge der optimalen Lösung des klassischen Problems für  $H_4^n$  heraus. Sie wurde mit Computerhilfe basierend auf dem in 11.1 beschriebenen *Dijkstra-Algorithmus* bis  $n = 30$  ebenso verifiziert wie einige andere metrische Größen wie Durchmesser von  $H_4^n$  und Exzentrizität perfekter Zustände bestimmt. Mit diesen offenen Fragen endet unser Exkurs in die Welt der Graphen.

Die Übungsaufgaben stellen einen integralen Bestandteil der Lehrveranstaltung dar. Sie beinhalten Ergänzungen zum Vorlesungsstoff und Anwendungsbeispiele. Hier einige Höhepunkte: Das Handshaking Lemma (Aufgabe 1 a), das Wasserwerk-Gaswerk-Elektrizitätswerk-Problem (Aufgabe 2), unendlicher Abstieg und vollständige Induktion (Aufgabe 4), die (unorthodoxe) Lösung des klassischen Turms von Hanoi (Aufgabe 5), der Hauptsatz über Äquivalenz-Relationen (Aufgabe 6 b), Anwendungen des Schubfachprinzips (Aufgabe 8), die Binomialkoeffizienten (Aufgabe 9), die Subfakultät und ihre Anwendungen (Aufgabe 10), perfekte Codes (Aufgabe 11), die Lösung des Königsberger-Brücken-Problems (Aufgabe 13 b), die Sierpiński-Graphen (Aufgabe 14), eine Charakterisierung bipartiter Graphen (Aufgabe 15 b), die Quadratfreiheit der Gros-Folge (Aufgabe 21), der "Baum von Hanoi" (Aufgabe 22), eine Folgerung der graceful tree conjecture (Aufgabe 24), der Haremssatz (Aufgabe 25), Eigenschaften der Hanoi-Graphen  $H_3^n$  (Aufgaben 29 und 30), eine Weihnachtsaufgabe für  $H_5^9$ , Lucas' Zweites Problem (Aufgabe 31), die Bestimmung des Alters des Universums durch Beobachtung der Brahmanen (Aufgabe 32), Sterns diatomische Folge (Aufgabe 34) und die Eigenschaften der Hanoi-Graphen höherer Basis (Aufgabe 35), darunter die Nicht-Planarität von  $H_4^3$ . Die Aufgaben werden alle im Text der Vorlesung angesprochen und sollten an der jeweiligen Stelle lösbar sein. Vollständige Lösungen werden bereitgestellt.

Das kritische Literaturverzeichnis soll (und kann) nicht erschöpfend sein, eher vielseitig. Es enthält verwendete Literatur und einige darüber hinausgehende Werke geordnet in

0. Originalliteratur
- I. Historisches
- II. Biographisches
- III. Lehrbücher über Graphen

#### IV. Lehrbücher zu anderen Themen

#### V. Sonstiges.

Innerhalb dieser Ordnung sind die einzelnen Eintragungen arabisch durchnummeriert, so daß zum Beispiel das Zitat "[III.1]" im Text auf das Buch von D.B. West, *Introduction to Graph Theory* verweist. Die Kommentare sind natürlich von persönlichem Geschmack geprägt und insofern mit Vorsicht zu genießen!

Dies ist eine vorläufige Version, die zunächst nur für den Kreis der Hörer meiner Vorlesung gedacht ist. Insbesondere wurden noch keine Anstrengungen zur sprachlichen Verfeinerung unternommen. Die historischen Bemerkungen und Daten sind nur zum Teil mit Originalen belegt, mehrere Angaben stammen aus sekundären Quellen und bedürfen daher einer Überprüfung. Der mathematische Inhalt dieser Vorlesung sollte aber verlässlich sein. Für Hinweise auf Fehler oder sonstige Anregungen bin ich in dieser Phase natürlich sehr dankbar.

Ich danke Hubert Kalf, Daniele Parisse, Ciril Petr und Sandi Klavžar für Diskussionen und Literatur- bzw. Zitatensuche. Insbesondere danke ich den Hörer(inne)n meiner Vorlesung und meinen Staatsexamens- und Diplomkandidat(inn)en für ihre Geduld, Anregungen und, allen voran Simon Aumann, Simon Matthias Brodt und Andreas Groh, de- und kon-struktive Kritik. Seit der Vorlesung [IV.1] hat meine Beschäftigung mit Themen der diskreten Mathematik eine fruchtbare Entwicklung genommen. Ein Zweiter Preis beim Wettbewerb im Rahmen des Internationalen Mathematiker-Kongresses 2006 in Madrid für mein Poster "From London to Hanoi and back", die Lösung des Kantenfärbungsproblems für Hanoi- und Sierpiński-Graphen zusammen mit meinem Mitstreiter Daniele Parisse (EADS) und die Zusammenarbeit mit den Mitarbeiter(inn)en der Arbeitsgruppe Kognitive Neuropsychologie an der Neurologischen Klinik und Poliklinik der LMU und mit Ciril Petr (Iskratel, Maribor) wurden ergänzt durch die Arbeit mit Student(inn)en meines Seminars im Wintersemester 2006/7 und des Oberseminars im Sommersemester 2007. Diese erfreulichen generations-, fach- und kulturübergreifenden Aktivitäten lassen gelegentlich den durch Erfolgsgomanie, Schubladendenken und Elitedünkel hervorgerufenen Klimawandel in der akademischen Welt vergessen.

München im Februar 2008

Andreas M. Hinz



# Inhalt

<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>Inhalt</b>	<b>11</b>
<b>Kapitel 0. Einleitende Beispiele</b>	<b>13</b>
<b>0. Topologische Fragestellungen</b>	<b>15</b>
<b>1. Metrische Fragestellungen</b>	<b>19</b>
<b>1.0. Die Chinesischen Ringe</b>	<b>19</b>
<b>1.1. Der Turm von Hanoi</b>	<b>24</b>
<b>2. Formale Definition der Graphen</b>	<b>25</b>
<b>Kapitel 1. Mengen und Zahlen</b>	<b>27</b>
<b>3. Mengen</b>	<b>27</b>
<b>3.1. Zerlegungen</b>	<b>27</b>
<b>3.2. Gleichwertigkeit</b>	<b>28</b>
<b>4. Zahlen</b>	<b>30</b>
<b>4.1. Anzahl</b>	<b>30</b>
<b>4.2. Rekursion</b>	<b>32</b>
<b>4.3. Metrische Räume</b>	<b>35</b>
<b>Kapitel 2. Spezielle Graphen</b>	<b>39</b>
<b>5. Weg-, Kreis- und vollständige Graphen</b>	<b>39</b>
<b>6. Bäume</b>	<b>43</b>
<b>6.1. Grundlegende Eigenschaften von Bäumen</b>	<b>43</b>
<b>6.2. Aufspannende Bäume</b> und eine weitere Charakterisierung von Bäumen	<b>46</b>
<b>6.3. Minimale aufspannende Bäume</b>	<b>49</b>
<b>6.4. Wurzelbäume und indizierte Bäume</b>	<b>51</b>
<b>6.4.1. Wurzelbäume</b>	<b>51</b>
<b>6.4.2. Indizierte Bäume</b>	<b>51</b>

6.4.3. Anmutige Bäume	52
7. Bipartite Graphen	54
8. Turm-Graphen	59
8.1. Analyse der Lösung zum klassischen TH-Problem	60
8.2. Rückkehr zu quadratfreien Folgen	61
8.3. Rückkehr zu Graphen	63
8.4. Metrische Eigenschaften der Hanoi-Graphen $H_3^n$	66
8.4.1. Die Lösung für $\mathfrak{P}_1$	66
8.4.2. Diskussion der Lösung für $\mathfrak{P}_1$	68
8.4.3. Die Lösung für $\mathfrak{P}_2$	71
8.5. Hanoi-Graphen zu höheren Basen	75
8.5.0. Des Teufels Nadel	75
8.5.1. Höhere Basen	76
Kapitel 3. Spezielle Fragestellungen	79
9. Planarität	79
10. Färbungen	84
10.1. Eckenfärbung	84
10.2. Kantenfärbung	86
10.3. Totalfärbung	89
11. Metrische Eigenschaften	89
11.0. Metrische Eigenschaften von $H_4^n$	89
11.1. Dijkstras Algorithmus	91
Aufgaben	93
Lösungen	101
Literatur	125
Index	135

## Kapitel 0. Einleitende Beispiele

*Mathematics intrigues people for at least three different reasons: because it is fun, because it is beautiful, or because it is useful.*

I. Stewart [V.1; S. 89]

*The origins of graph theory are humble, even frivolous. Whereas many branches of mathematics were motivated by fundamental problems of calculation, motion, and measurement, the problems which led to the development of graph theory were often little more than puzzles, designed to test the ingenuity rather than to stimulate the imagination. But despite the apparent triviality of such puzzles, they captured the interest of mathematicians, with the result that graph theory has become a subject rich in theoretical results of a surprising variety and depth.*

N.L.Biggs, E.K.Lloyd, R.J.Wilson [I.1; S. 1]

Graphische Darstellungen von Objekten, die paarweise miteinander in Beziehung stehen können, sind uns aus dem Alltagsleben z. B. in Gestalt von U-Bahn-Netzplänen bekannt. Das wohl älteste Beispiel ist die *Tube map* der London Underground, wo man seit den 1920er Jahren das Untergrundnetz mathematisch modelliert unter teilweiser Weglassung geographischer und metrischer Gegebenheiten. Bahnhöfe werden durch Punkte in der Ebene dargestellt, und zwei Punkte (auch *Ecken* genannt) werden miteinander durch eine (meist gerade) Linie (*Kante*) verbunden, wenn die zugehörigen Bahnhöfe durch eine (meist nicht gerade) U-Bahn-Linie verbunden sind. Die Länge der gezeichneten Linien ist dabei nicht mit der Länge der Schienenstrecke korreliert, und auch die Lage der Punkte muß nicht der geographischen Situation entsprechen. (Tatsächlich enthalten die Netzpläne aber mehr Information, z. B. durch Einfärbung gemäß der Liniennummer.) Ein solcher Plan gestattet es dann, eine Fahrtroute von einem Start- zu einem Zielbahnhof zu bestimmen, vorausgesetzt das System ist *zusammenhängend*.

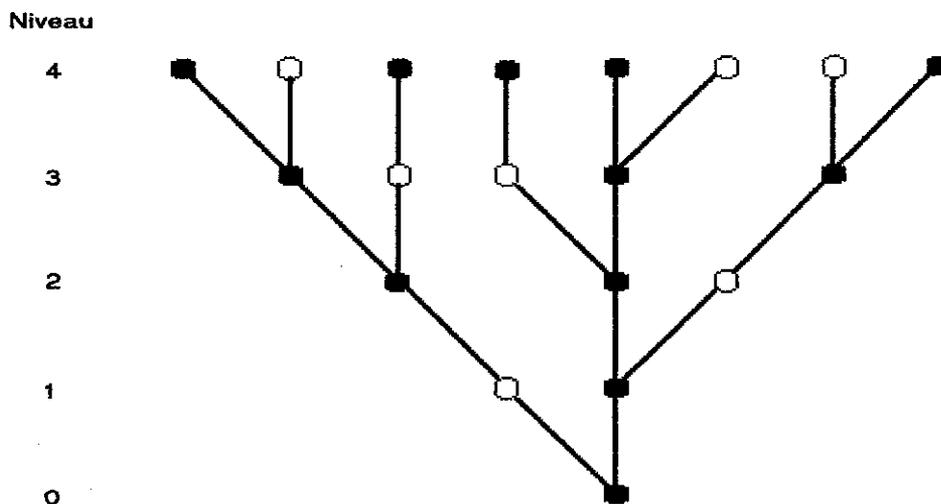
Ein anderes vertrautes Beispiel einer zusammenhängenden graphischen Darstellung von bilateralen Beziehungen ist der *Stammbaum*, bzw. Nachfahrenbaum. Hiermit läßt sich z. B. eine der ältesten Aufgaben der *diskreten Mathematik* (lat.: *dis-cernere*, etwa: voneinander unterscheiden) modellieren und lösen, die von Leonardo Pisano (genannt

Fibonacci (Sohn der Bonacci-Familie); ca. 1170(Pisa)- nach 1240(Pisa)) aus seinem Buch *Liber abbaci* (Buch der Rechenkunst) stammt, vgl. [O.1; S.2-3]:

**Beispiel 0.1.** Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.

*Ein Mann hat ein Kaninchen-Paar an einem gewissen Ort, der vollständig von einer Mauer umgeben ist. Wir wollen wissen, wieviele Paare in einem Jahr aus diesem Paar entstehen, wenn die Natur der Kaninchen so ist, daß sie jeden Monat ein neues Paar erzeugen und damit im zweiten Monat nach ihrer Geburt beginnen.* □

Zur Lösung zeichnet man einen *Baum* (siehe Figur 1): An der *Wurzel* (Beginn des ersten Monats) steht ein geschlechtsreifes Paar (ausgefüllter Punkt). Von ihm gehen zwei Linien aus zum Niveau 1 (nach einem Monat), eine zu sich selbst und eine zu dem neugeborenen Paar (unausgefüllter Punkt). So fortfahrend erhält man durch Abzählen der Punkte (Kaninchen-Paare) auf Niveau 12 das Ergebnis 377.

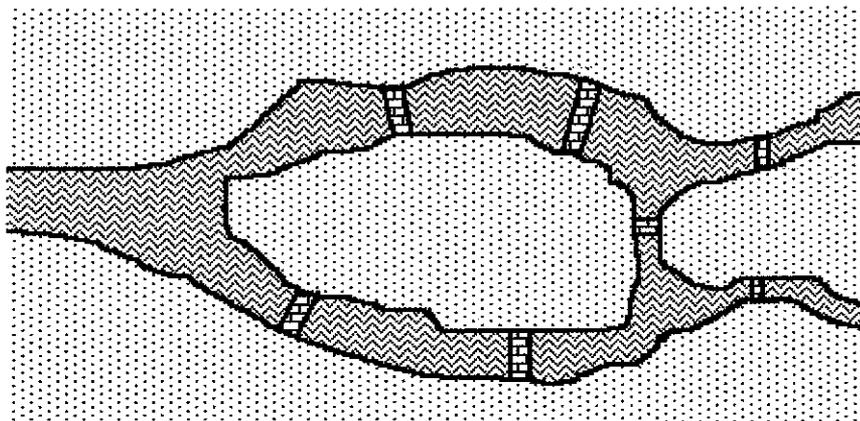


Figur 1

Bäume wurden Mitte des 19. Jahrhunderts erstmals im Zusammenhang der chemischen *Isomere* (gleiche Summenformel bei unterschiedlicher Struktur) von A. Cayley (1821(Richmond)-1895(Cambridge)) betrachtet (und so genannt). Diese *chemischen Graphen* tauchen dann 1877/8 bei J. J. Sylvester (1814(London)-1897(London)) auf, der das Wort *Graph* erstmals in unserem Sinne verwandte. Für die Originalarbeiten siehe [I.1; Chapter 4]. Im Jahre 1936 erschien die erste umfassende Monographie [O.2] von D. König (1884(Budapest)-1944(Budapest)).

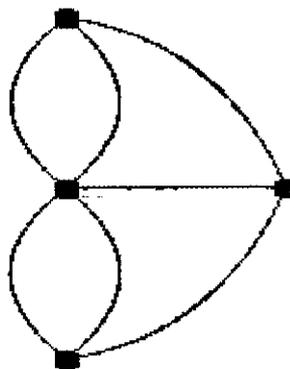
### 0. Topologische Fragestellungen

Als Geburtsstunde der *Graphentheorie* gilt aber, wie sollte es anders sein, eine zweihundert Jahre ältere Arbeit von Leonhard Euler (1707(Basel)-1783(St.Petersburg)) (Das Original findet sich in [O.2; S.275-288]; deutsche Übersetzung [O.2; S.290-301], englische Übersetzung [O.1; 183-187].) Sie befaßt sich mit dem *Königsberger Brückenproblem*, das darin besteht, die sieben Brücken die im alten Königsberg über den Fluß Pregel führten und die vier Stadtteile, darunter die Insel Kneiphof, miteinander verbanden, auf einem Spaziergang alle zu überqueren, jede aber nur genau einmal (vgl. Figur 2).



Figur 2

Die topographische Situation läßt sich modellieren durch einen *Multigraphen*, einem Graphen mit Mehrfachkanten. Repräsentiert man die Stadtteile durch Ecken und die Brücken durch Kanten, so ist die oben gestellte Frage die nach einem *eulerschen Kantenzug* in diesem Multigraphen (siehe Figur 3).



Figur 3

Euler stellte fest, daß ein eulerscher Kantenzug (oder gar ein *geschlossener*, d. h. an den

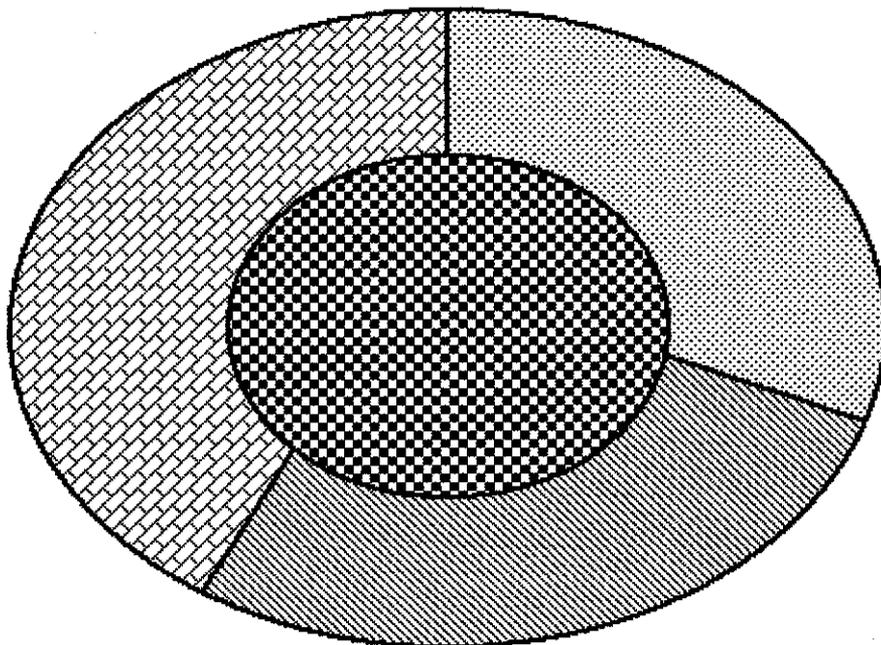
Ausgangspunkt zurückkehrender) nicht möglich ist, da der Multigraph mehr als 2 Ecken mit ungeradem *Grad*, d.i. die Anzahl der dort zusammenkommenden Kanten, besitzt. Er verallgemeinerte die Fragestellung und gab ein notwendiges Kriterium für die Existenz eines (geschlossenen) eulerschen Kantenzuges an, was er als ein erstes, wenn auch banales, Beispiel für eine Aussage der *geometria situs*, unserer heutigen *Topologie*, ansah (vgl. [1.3]). Die Arbeit Eulers enthält auch den "ersten Satz der Graphentheorie", das sogenannte *Handshaking Lemma* (siehe Aufgabe 1 a).

Eine duale Fragestellung, ob es möglich ist, alle Ecken eines Graphen genau einmal zu durchlaufen (und zur Ausgangsecke zurückzukehren) wurde von William Rowan Hamilton (1788(Glasgow)-1856(Edinburgh)) im Zusammenhang mit dem *Icosian Game* (1859) populär gemacht; vgl. [1.1; S. 31ff]. Man wird daher von einem *hamiltonschen Weg* (*Kreis*) sprechen.

In Vorlesungen um das Jahr 1840 stellte A. F. Möbius (1790(Schulpforta)-1868(Leipzig); vgl. [11.2]) folgendes Problem (vgl. [1.1; S. 115f]):

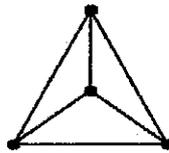
*Ein König hatte fünf Söhne. In seinem Testament verfügte er, daß seine Söhne das Königreich so unter sich in (jeweils zusammenhängende) Gebiete aufteilen sollen, daß jedes Gebiet mit jedem anderen eine gemeinsame Grenzlinie (und nicht nur einen Grenzpunkt) besitzt.*

Ist dieser letzte Wille erfüllbar? Stürbe einer der Söhne vor seinem Vater, so wäre die Antwort ja, wie man der Figur 4 entnehmen kann.



Figur 4

Ersetzt man die Gebiete durch Ecken (Hauptstadt), die man durch eine Kante (Eisenbahnlinie) verbindet, wenn sie eine gemeinsame Grenze besitzen, so ist die Fragestellung (in nicht trivialer Weise; vgl. [V.3; Abschnitt 4.4]) äquivalent zur Aufgabe, einen *vollständigen* Graphen (d.h. jede Ecke ist mit jeder anderen verbunden) in der Ebene so zu zeichnen, daß keine *Überschneidung* der Kanten (Schienenkreuzung) auftritt; man spricht von einem *planaren* Graphen. (Etwas präziser ist die *Zeichnung* eines Graphen die Darstellung der Ecken als verschiedene Punkte und der Kanten als die zu ihren *Endecken* gehörigen Punkte verbindende Linien (o. E. Polygonzüge), die sonst keine der zu Ecken gehörigen Punkte durchlaufen und paarweise höchstens einen Schnittpunkt besitzen.) Der vollständige Graph der *Ordnung* 4 (d.h. mit 4 Ecken) ist planar, wie Figur 5 zeigt.

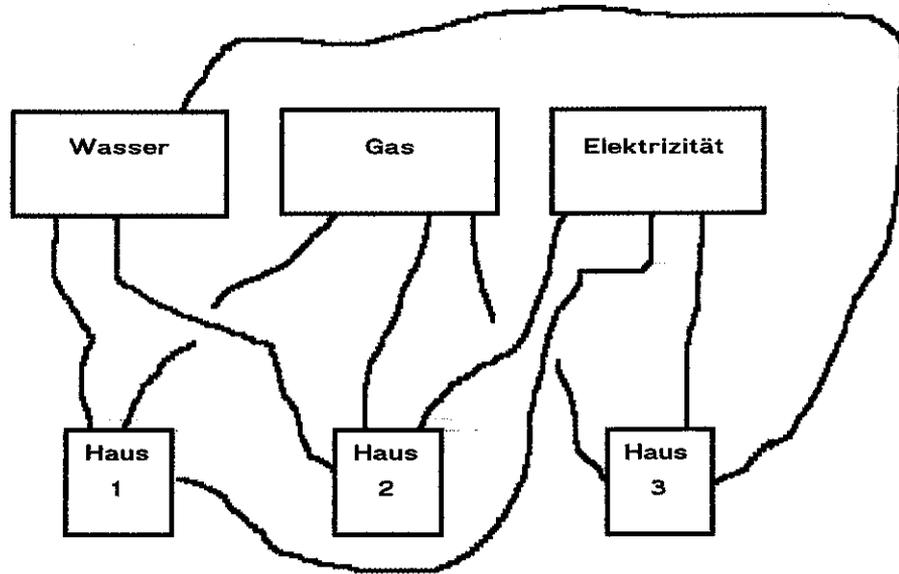


Figur 5

Daß  $K_5$ , der vollständige Graph der Ordnung 5 nicht planar sein kann, zeigt folgende Überlegung: Wegen der Endlichkeit der Eckenzahl macht es keinen Unterschied, ob man den Graphen in der Ebene oder auf einer Kugeloberfläche (Sphäre) zeichnet (stereographische Projektion, deren Zentrum keine Ecke ist). Der Graph  $K_5$  enthält den *Kreis(graphen)*  $C_5$ , d. i. der Graph, der entsteht, wenn man die 5 Ecken zyklisch miteinander verbindet, als *Teilgraphen*. Liegt nun dieser Kreis mit seinen fünf Kanten auf dem Äquator der Sphäre, so können nur jeweils zwei weitere Kanten überschneidungsfrei auf der Nord- bzw. Süd-Halbkugel laufen. Da alle fünf Ecken den Grad 4 haben, besitzt  $K_5$  aber nach dem Handshaking Lemma 10 Kanten und damit die *Überschneidungszahl* 1. Der letzte Wille des Königs im Möbiusschen Problem ist also nicht erfüllbar.

Eine verwandte Aufgabe ist das bekannte "Wasserwerk-Gaswerk-Elektrizitätswerk-Problem" (vgl. [I.1; S.142]). Die Aufgabe besteht darin, die drei Versorger durch Leitungen in einer Ebene so mit drei Verbraucher-Häusern zu verbinden, daß sich keine Leitungen überschneiden (siehe Figur 6); vgl. Aufgabe 2.

Das Beispiel in Figur 4 zeigt, daß zum Färben von Landkarten, auf denen benachbarte Länder verschiedene Farben erhalten, mindestens 4 Farben vonnöten sind (vgl. auch die Lage Luxemburgs). Da die Erfahrung zeigte, daß 4 Farben auch tatsächlich auszureichen schienen, wurde im 19. Jahrhundert die *Vier-Farben-Vermutung* aufgestellt. (Die negative



Figur 6

Antwort auf Möbius' Frage ist kein Beweis hierfür!) Beweisversuche scheiterten immer wieder ([I.1; Chapter 6]). Ab 1977 tauchten schließlich Beweise auf, die das Problem auf die Untersuchung von endlich (wennauch) vielen Fällen reduzierten und diese mit Hilfe eines Computers durchprüften ([V.2]; vgl. [V.18]). Mittlerweile sind diese Beweise allgemein akzeptiert, wenngleich nach wie vor philosophische Einwände vorgebracht werden (siehe [I.1; Chapter 9], [V.3] und [V.4]). Der Vier-Farben-Satz ist äquivalent zu einer topologischen Aussage über planare Graphen, nämlich daß man ihre Ecken mit 4 Farben so einfärben kann, daß durch eine Kante verbundene Ecken verschieden gefärbt sind (vgl. [V.3; Satz 5.3.1]).

Solche Eckenfärbungsprobleme sind wie alle anderen bislang angesprochenen Fragestellungen topologischer Natur, da von quantitativen Eigenschaften der betrachteten Modelle kein Gebrauch gemacht wurde. Einem zusammenhängenden Graphen kommt aber auf naheliegender Weise ein *Abstandsbegriff* zu, der gegeben ist durch die Länge des *kürzesten* unter den zwei Ecken verbindenden Wegen; die *Länge* eines Weges ist dabei die Anzahl der durchlaufenen Kanten. (Man beachte aber, daß hierdurch z.B. bei der Routenplanung in einem U-Bahn-Netz nur die Anzahl der Streckenabschnitte gezählt und nicht der geographische Abstand der Bahnhöfe gemessen wird.) *Metrische* Problemstellungen sind daher ein weiterer wichtiger Aspekt der Graphentheorie. Ein Beispiel ist die Lösung von Solitärspielen.

## 1. Metrische Fragestellungen

### 1.0. Die Chinesischen Ringe

Eines der ältesten ist das der *Chinesischen Ringe* (*nine linked rings*; *jiu lian huan*, auch französisch *Baguenaudier* genannt); vgl. [V.5]. (Im Nürnberger Spielzeugmuseum findet sich ein Exemplar unter dem Namen *Nürnberger Zankeisen* (Inv.-Nr. 1966.374); vgl. [V.6; S.60].) Das Spiel besteht aus 9 Ringen auf einer Stange mit einem Griff an einem (sagen wir, dem linken) Ende. Die Ringe können nur am anderen Ende von der Stange herunter oder auf die Stange hinauf bewegt werden, und die mechanische Bauart gestattet nur die folgenden Bewegungen:

(i) der Ring rechtsaußen kann immer bewegt werden;

(ii) der Ring nach dem ersten Ring (von rechts) auf der Stange kann bewegt werden.

Aufgabe ist es, alle Ringe von der Stange zu entfernen. Es stellen sich folgende Fragen:

a) Gibt es eine Lösung (*Existenz*)?

Falls die Antwort "ja" lautet, gibt es in jedem Fall eine kürzeste Lösung (gemessen an der Zugzahl); das ist eine Folge der *Wohlordnung* von  $\mathbb{N}_0$  (Aufgabe 3), wenn man  $N = \{v \in \mathbb{N}_0; \text{es gibt eine Lösung in } v \text{ Zügen}\}$  setzt.

b) Gibt es nur eine (kürzeste) Lösung (*Eindeutigkeit*)?

c) Gibt es eine *effiziente* Lösung, d.h. einen *Algorithmus*, der eine kürzeste Lösung erzeugt?

(Der Begriff "Algorithmus" ist nach Muḥammad ibn Musa al-Khwarizmī, ca. 780–850 (Khoresm, Usbekistan), benannt, dessen Buch über praktische Arithmetik in einer lateinischen Übersetzung mit den Worten "Dixit Algorismi (also sprach al-Khwārisimī) beginnt; von den von ihm verwendeten arabischen Wörtern *sifr* und *al-jabr* stammen auch unsere Begriffe *Ziffer* und *Algebra*.) Hierzu folgende Begriffsbestimmung:

*Ist ein Problem gestellt, das bei Vorgabe gewisser endlicher Mengen von Anfangsdaten jeweils eine Lösung besitzt, so versteht man unter einem **Algorithmus** zu diesem Problem eine Folge von Anweisungen, die bei beliebiger zulässiger Festlegung der Anfangsdaten ausführbar ist, so daß am Ende eine Lösung vorliegt.*

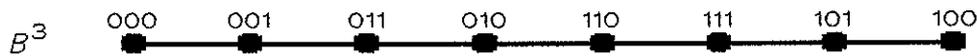
Die wichtigsten Fragen bei der Analyse eines Algorithmus sind die nach der *Korrektheit* und nach der *Komplexität*. Ersteres bedeutet, daß der Algorithmus tatsächlich das betreffende Problem löst, letzteres ist ein Maß für die Kosten seiner Durchführung. Das berühmteste Beispiel ist der *Euklidische Algorithmus* (vgl. [IV.1; S.13f]).

Um diese Fragen anzugehen, modellieren wir die Chinesischen Ringe als einen *Zustandsgraphen*, dessen Ecken die Verteilungen der Ringe auf die Stange repräsentieren und dessen Kanten den zulässigen Zügen gemäß (i) und (ii) entsprechen. Nehmen wir an, es seien  $n \in \mathbb{N}_0$  Ringe vorhanden ( $n=9$  ist der klassische Fall). Im Geiste von yin und yang ordnen wir dem Ring  $r \in [n]$  von rechts den Wert  $s_r=1$  zu, wenn  $r$  auf der Stange sitzt und  $s_r=0$  sonst. (Für  $n \in \mathbb{N}_0$  ist der  $n$ -Abschnitt ( $n$ -segment) definiert durch  $[n] := \{1, \dots, n\} := \{k \in \mathbb{N}; k \leq n\}$  bzw.  $[n]_0 := \{0, \dots, n-1\} := \{k \in \mathbb{N}_0; k < n\}$ .) Ein *Zustand* (*state*) des Spiels ist dann vollständig beschrieben durch  $s: [n] \rightarrow [2]_0$ ,  $r \mapsto s_r$ , also durch eine Binärzahl  $s_n \dots s_1$  mit  $n$  Bits (*binary digits*). Wir schreiben auch  $s \in ([2]_0)^n =: B^n$ .

**Definition 1.1.** Sind  $M$  und  $N$  Mengen, so bezeichnet  $M^N := \{f: N \rightarrow M\}$  die Menge aller Abbildungen von  $N$  nach  $M$ . Für  $n \in \mathbb{N}_0$  ist  $M_{(0)}^n := M^{[n]_{(0)}}$  die Menge aller *endlichen Folgen oder Wörter der Länge  $n$  oder  $n$ -Tupel* über  $M$ . Ein Element von  $M^{\mathbb{N}_{(0)}}$  heißt eine (*unendliche*) *Folge (sequence)* in  $M$ . ■

Unsere ursprüngliche Aufgabe zu den Chinesischen Ringen ist nun übersetzt in das Problem, eine (kürzeste) Folge von Zuständen  $s \in (B^n)_0^{d+1}$  mit  $s_0 = 0 \dots 0$  und  $s_d = 1 \dots 1$  zu finden mit der Eigenschaft, daß für jedes  $i \in [d]_0$  der Zustand  $s_{i+1}$  aus dem Zustand  $s_i$  durch eine legale Bewegung eines Rings hervorgeht. Wir durften mit  $0 \dots 0$  beginnen, da alle legalen Züge in beiden Richtungen erlaubt sind; hier ist der Grad 1 mit Nachbarecke  $0 \dots 01$ . Von dort aus geht man zur einzigen weiteren Nachbarecke  $0 \dots 011$ . Dieses Verfahren endet erst, wenn man auf eine bereits besuchte Ecke stößt, was aber unmöglich ist, da deren Grad schon ausgeschöpft ist, oder bei der einzigen anderen Ecke vom Grad 1 angelangt ist, nämlich  $10 \dots 0$ . Wenn wir wüßten, daß die ursprüngliche Aufgabe lösbar ist,  $1 \dots 1$  also in der gleichen *Zusammenhangskomponente* des Graphen  $B^n$  liegt wie  $0, \dots, 0$ , so wären wir fertig. (Solch ein Argument ist sehr gefährlich: *Behauptung*: 1 ist die größte natürliche Zahl. "*Beweis*": Sei  $n := \max \mathbb{N}_0$ .

Dann ist  $n \geq 1$ , da  $1 > 0$ ; wäre  $n > 1$ , so wäre  $n^2 > n$ , ein Widerspruch zur Maximalität von  $n$ . Also ist  $n = 1$ .) Es ist aber zunächst nicht ausgeschlossen, daß die Ecke  $1 \dots 1$  in einem Kreis liegt, dessen Ecken alle den Grad 2 haben. Wir beweisen nun mit vollständiger Induktion (Aufgabe 4 b), daß der Graph  $B^n$  zusammenhängend ist. Für  $n = 0$  ist kein Zug zu machen. Ist  $00 \dots 0 \in B^{1+n}$ , so kommt man nach Induktionsannahme über sämtliche Ecken  $0s$ ,  $s \in B^n$  nach  $010 \dots 0$  und damit nach einem weiteren Zug nach  $110 \dots 0$ . Dieser Zug ist der einzig mögliche von  $0B^n$  nach  $1B^n$ . Schließlich kann man die Zugfolge aus der Induktionsannahme umkehren, um wiederum durch alle Ecken  $1s$ ,  $s \in B^n$  nach  $10 \dots 0$  zu gelangen, wodurch alle Ecken in  $B^{1+n}$  besucht wurden. ( $B^n$  stellt einen sogenannten *Weggraphen* dar; vgl. Figur 7.)



Figur 7

Damit sind Lösbarkeit und Eindeutigkeit der kürzesten Lösung nachgewiesen. Es bleibt noch die Frage nach einem effizienten Algorithmus.

Der Induktionsbeweis hat gezeigt, daß die Länge  $\alpha_n$  des kürzesten Weges von  $0 \dots 0 \in B^n$  nach  $10 \dots 0 \in B^n$  der *Rekursion*

$$\alpha_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}_0: \alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 1 \quad (0)$$

genügt. Mit vollständiger Induktion sieht man, daß dies  $\forall n \in \mathbb{N}_0: \alpha_n = 2^n - 1$  zur Folge hat. Der kürzeste Weg (der Länge  $\beta_{n+1}$ ) von  $1 \dots 1 \in B^{n+1}$  nach  $0 \dots 0 \in B^{n+1}$  setzt sich für  $n \in \mathbb{N}$  zusammen aus dem Weg von  $1 \dots 1$  nach  $110 \dots 0$  (der Länge  $\beta_{n-1}$ ), dem einen Zug nach  $010 \dots 0$  und  $\alpha_n$  weiteren Zügen. Die Folge  $\beta$  erfüllt also das Rekursionschema 2-ter Ordnung

$$\beta_0 = 0, \beta_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}: \beta_{n+1} = \beta_{n-1} + 2^n. \quad (1)$$

Mit Hilfe der starken vollständigen Induktion (Aufgabe 4 c) folgt

$$\forall n \in \mathbb{N}: \beta_n = \frac{1}{3} (2^{n+1} - 1 - (n \text{ gerade})). \quad (2)$$

(Um die gesamte Mathematik auf 0 und 1 zu reduzieren, führt man die **Iverson-Konvention** (K. Iverson, 1962) ein, wonach wir für eine Aussage  $A$  schreiben (vgl. [V.7])

$$(A) = 1, \text{ wenn } A \text{ wahr ist; } (A) = 0, \text{ wenn } A \text{ falsch ist.}$$

Man sieht, daß die Glieder der Folge  $\beta$  abwechselnd gerade (für gerades  $n$ ) und ungerade (für ungerades  $n$ ) sind. (In der Tat stellt  $\beta$  die Folge der Binärzahlen mit

oszillierenden Bits dar:  $0, 1, 10, 101, 1010, \dots$ ; die Folge der Differenzen  $\beta_{n+1} - \beta_n$  heißt **Jacobsthal-Folge** (vgl. [V.8; M 2482].) Da alle ungeradzahigen Züge von  $0 \dots 0$  nach  $1 \dots 1$  vom Typ (i) sein müssen und alle geradzahigen vom Typ (ii), ist der erste Zug von  $1 \dots 1$  nach  $0 \dots 0$  genau dann vom Typ (i), wenn  $n$  ungerade ist. Damit haben wir bewiesen:

**Proposition 1.1.** *Die Chinesischen Ringe mit  $n \in \mathbb{N}_0$  Ringen sind lösbar. Die kürzeste Lösung ist eindeutig und hat die Länge  $\frac{1}{3}(2^{n+1} - 1 - (n \text{ gerade}))$ . Sie wird realisiert, indem man für ungerades  $n$  mit Ring 1, für gerades  $n$  mit Ring 2 beginnend Züge der Typen (i) und (ii) abwechselnd durchführt.* ■

**Korollar 1.2.** *Die klassischen Chinesischen Ringe mit 9 Ringen sind in und in nicht weniger als 341 Zügen lösbar. Die kürzeste Lösung ist eindeutig und beginnt mit einem Zug von Ring 1.* ■

Es folgt eine Analyse der in Proposition 1.1 gefundenen Lösung. Wenn wir mit der leeren Stange beginnen, so fängt die Zugfolge der Ringe folgendermaßen an:

$$g = 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 5, 1, 2, 1, 3, 1, \dots$$

(jetzt sind die ersten 5 Ringe auf der Stange, die anderen unten). Das Element  $g_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , dieser Folge (benannt nach L. Gros (1814-???) ist gleich der Anzahl der Faktoren 2 in  $2k$  (vgl. [V.8; M 0127]), bzw. die Stelle (gezählt von 1) der am weitesten rechts stehenden 1 in der Binärdarstellung von  $k$ . Die Folge  $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  taucht in vielerlei Gestalt auf.

Offensichtlich erfüllt sie die Rekursion

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ ungerade: } g_k = 1, \forall k \in \mathbb{N} \text{ gerade: } g_k = g_{k/2} + 1. \quad (3)$$

Aus (3) folgt, daß der Ring  $r \in [n]$  genau in solchen Zügen mit der Nummer  $x \in \mathbb{N}$  bewegt wird, wo  $g_x = r$  ist. Das ist genau dann der Fall, wenn  $x = 2^{r-1} + \lambda 2^r$  für ein  $\lambda \in \mathbb{N}_0$ . Also ist Ring  $r$  nach  $k \in \mathbb{N}_0$  Zügen genau  $\min\{\lambda \in \mathbb{N}_0; k < 2^{r-1} + \lambda 2^r\}$  mal gezogen worden, so daß der Zustand  $s(k) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} B^n$  nach  $k$  Zügen gegeben ist durch

$$s(k)_r = \left\lfloor \frac{k}{2^r} + \frac{1}{2} \right\rfloor \bmod 2, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

(Die durch

$$\forall x \in \mathbb{R}: \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$$

$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z}; n \geq x\}$$

gegebenen Abbildungen aus  $\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$  heißen **Floor-** bzw. **Ceilingfunktion**. Ferner seien für  $n \in \mathbb{Z}$  und  $m \in \mathbb{N}$  definiert:

$$n \div m := \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor, \quad n \bmod m := n - m(n \div m), \quad m \mid n : \Leftrightarrow n \bmod m = 0.$$

Schreibt man  $k$  in binärer Darstellung als  $\sum_{i=0}^{\infty} k_i 2^i$ ,  $k_i \in [2]_0$ , so ist

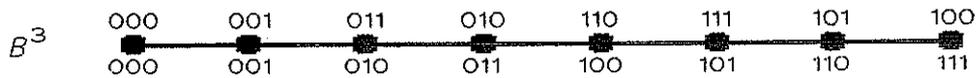
$$\forall r \in \mathbb{N}: s(k)_r = k_r + k_{r-1} - 2k_r k_{r-1}, \quad (5)$$

denn wenn  $k_{r-1} = 0$ , dann ist  $\left\lfloor \frac{k}{2^r} + \frac{1}{2} \right\rfloor \bmod 2 = \sum_{i=0}^{\infty} k_{i+r} 2^i$ , und das ist ungerade genau dann, wenn  $k_r = 1$ ; wenn  $k_{r-1} = 1$ , dann ist  $\left\lfloor \frac{k}{2^r} + \frac{1}{2} \right\rfloor \bmod 2 = 1 + \sum_{i=0}^{\infty} k_{i+r} 2^i$ , und das ist ungerade genau dann, wenn  $k_r = 0$ . Die durch (5) gegebene Abbildung stellt eine **Kodierung (encoding)** der natürlichen Zahlen dar, den sogenannten **reflektierten Binär-code** oder **Gray-Code** (nach F. Gray, ???-1969; *reflektiert* wegen der Konstruktion im Beweis zu Proposition 1.1), der die Eigenschaft hat, daß sich  $s(k)$  und  $s(k+1)$  nur um ein Bit unterscheiden. Eine praktische Realisierung besteht darin, daß man  $k$  als Binärzahl  $k_n k_{n-1} \dots k_1 k_0$  mit  $k_n = 0$  und  $k_{n-1} = 1$  hinschreibt und hieraus  $s(k) = s_n \dots s_1 \in B^n$  gewinnt, indem man  $s_r$  gleich 1 setzt, wenn  $k_r$  und  $k_{r-1}$  verschieden sind und 0 sonst. Die Komplexität dieses Algorithmus ist *polynomial* (sogar *linear*), da bei der Eingabe einer  $n$ -Bit Zahl  $k$  eine höchstens *polynomial* (hier *linear*) von  $n$  abhängige Zahl von Arbeitsschritten durchgeführt werden müssen.

Bei jeder Kodierung stellt sich das umgekehrte (*inverse*) Problem, der **Dekodierung (decoding)**, d.h. in unserem Fall aus  $s(k)$  das  $k$  zurückzugewinnen. Das setzt voraus, daß die Abbildung  $s$  bijektiv ist. In der Tat kann man, wenn von  $0 \dots 0 \in B^n$  ausgehend die  $n$  Chinesischen Ringe durch  $k$  der Gros-Folge folgende Züge verändert wurden, aus dem dann entstandenen Zustand  $s(k) \in B^n$  die Zahl  $k \in [2^n]_0$  bestimmen, indem man die aufgrund unserer obigen Überlegungen eindeutige kürzeste Zugfolge von  $s(k)$  nach  $0 \dots 0$  durchläuft und mitzählt. (Zur Entscheidung der Frage, ob der erste Zug vom Typ (i) oder (ii) ist, erinnert man sich, daß die beiden Typen sich abwechseln und berücksichtigt, daß die Parität der Anzahl der 1-Bits von  $s$  auf dem kürzesten Weg ebenfalls alterniert; ist diese Anzahl bei  $s(k)$  ungerade, so beginne man mit einem Zug vom Typ (i), sonst mit (ii).) Die Umkehrabbildung (der sogenannte **Gros-Code**; vgl. [V.5]) ist gegeben durch

$$B^n \ni s = s_n \dots s_1 \mapsto k = \sum_{i=0}^n k_i 2^i \in [2^n]_0, \quad k_n = 0, \quad \forall r \in [n]: k_{r-1} = \frac{s_r - k_r}{1 - 2k_r} = s_r + k_r - 2s_r k_r,$$

d. h. beginnend mit  $r=n$  setzt man  $k_{r-1}$  gleich 1, wenn  $s_r$  und  $k_r$  verschieden sind und 0 sonst. (Man kann den Wert von  $k(s)$  auch bestimmen, indem man beim höchstwertigen 1-Bit  $s_n=1$  von  $s$  beginnend für  $s_r=1$  abwechselnd  $2^r-1$  hinzufügt bzw. abzieht.) Es ist daher auch möglich zu sagen, wie lange eine Person bereits (Fehlerlosigkeit vorausgesetzt) an den Chinesischen Ringen arbeitet, wenn wir den augenblicklichen Zustand beobachten. Für die Korrespondenz zwischen  $s$  (oben) und  $k$  (unten) siehe das Beispiel von  $B^3$  in Figur 8.



Figur 8

### 1.1. Der Turm von Hanoi

Im Jahre 1883 erschien in Paris ein Spiel auf dem Markt mit dem Namen *La Tour d'Hanoi*. (Die heutzutage häufig anzutreffende Pluralform stammt aus der Computer Science Literatur und sollte (daher) vermieden werden.) Die Titelseite erweckt den Eindruck einer Herkunft aus dem heutigen Vietnam, vermittelt durch einen gewissen Professor *N. Claus (de Siam)*, möglicherweise die Person unten auf dem Druck mit den Buchstaben *A. U.* (*agrégée de l'Université?*) auf seinem Bauch. Bei dem berühmten Mandarin des *collège Li-sou-stian* handelt es sich jedoch um *Lucas d'Amiens* vom *collège Saint-Louis* in Paris, wie eine eigenhändige Widmung auf der Unterseite der Schachtel des im Conservatoire des Arts et Métiers in Paris aufbewahrten Originals belegt. François Édouard Anatole Lucas (1842(Amiens)-1891(Paris)) war ein außergewöhnlicher Mathematiker im Frankreich der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts. (Für eine Kurzbiographie siehe [V.9, S. 540f]; eine ausführliche biographische und soziale Studie wurde kürzlich von Anne-Marie Décaillot durchgeführt [II.3]; vgl. auch [II.4].) Das Spiel enthielt einen Beipackzettel [O.3], der neben den Regeln und einigen Hinweisen zur Lösung die klassische Legende des *Turms des Brahma* enthielt, die etwa folgendermaßen lautet:

*Es wird erzählt, daß im großen Tempel von Benares, unter der Kuppel, die den Mittelpunkt der Welt markiert, in eine horizontale*

*Bronzeplatte drei diamantene Nadeln vertikal eingelassen sind, jede eine Elle lang und so dick wie der Körper einer Biene. Auf der ersten dieser Nadeln hat der Schöpfer am Beginn der Zeiten vierundsechzig in ihrer Mitte durchbohrte, kreisförmige Scheiben aus purem Gold aufgereiht, die größte zuunterst. Das ist der Turm des Brahma. Seitdem sind Priester Tag und Nacht damit beschäftigt, Scheibe für Scheibe von einer Nadel auf die andere zu versetzen, ohne dabei die göttliche Regel zu verletzen, niemals eine größere auf eine kleinere Scheibe zu legen. Wenn alle Scheiben auf der dritten Nadel aufgereiht sind, werden der Turm und die Brahmanen zu Staub zerfallen, und das wird das Ende der Welt sein.*

Es stellen sich also dringend die Fragen, ob es den Brahmanen gelingen kann, den Turm aus 64 Scheiben zu versetzen und, wichtiger noch, wann sie es geschafft haben werden! Siehe Aufgabe 5.

## 2. Formale Definition der Graphen

In der bisherigen, "spielerischen" Einführung in die Theorie der Graphen tauchten bereits einige Stellen auf (Zeichnungen, duale Probleme, Eindeutigkeit bei Rekursionsrelationen), wo eine präzisere Definition der grundlegenden mathematischen Begriffe notwendig erschien. Sowohl in ihrer Verankerung in der reinen Mathematik, als auch im Hinblick auf Anwendungen in der Informatik stellt die diskrete Mathematik höchste Ansprüche an saubere Formulierungen und vorurteilslose Argumentation. Die zahlreichen Fehler, die in der Vergangenheit bei der Behandlung ihrer Fragestellungen aufgetreten sind, belegen dies. Wir werden daher jetzt unseren Begriff vom Graphen einführen und im folgenden Kapitel einige abstrakte Überlegungen zum mathematischen Hintergrund anstellen.

**Definition 2.0.** Ein **Graph** ist ein Paar  $G=(V,E)$ , worin  $V$  eine endliche Menge und  $E \subset \binom{V}{2}$  ist. Jedes  $v \in V$  heißt eine **Ecke** (oder **Knoten**; **vertex**, pl. **vertices**) von  $G$ ;  $e \in E$  heißt eine **Kante** (**edge**). ■

Hierin steht  $\binom{V}{2}$  für die Menge der zweielementigen Teilmengen von  $V$ .

*Bemerkungen.* 0. Mitunter bezeichnet man die Ecken- bzw. Kanten-Menge eines Graphen  $G$  mit  $V(G)$  bzw.  $E(G)$ ; umgekehrt schreibt man oft  $V$  für  $G$ , wenn die zugehörige Kantenmenge  $E$  festliegt.

1. Die Bezeichnungsweisen für Graphen sind nicht einheitlich. Man könnte  $E \subset \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$  ( $\binom{V}{1} := \{\{v\}; v \in V\}$ ) zulassen;  $e \in \binom{V}{1}$  heißt dann eine **Schlinge (loop)**, und man spricht von einem **Pseudographen (pseudograph)**. Ist  $E$  lediglich eine (endlich indizierte) Familie auf  $\binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$ , so sprechen wir von einem **(Pseudo-)Multigraphen**, in welchem **Mehrfachkanten (multiple edges)** zwischen zwei Ecken auftreten können (vgl. das Königsberger Brücken-Problem). (Manche Autoren nennen dies einen Graphen; unsere Graphen, also schlingenfrei und ohne Mehrfachkanten, heißen dann *einfache Graphen (simple graphs)*.)

Werden in diesen Definitionen  $\binom{V}{1}$  und  $\binom{V}{2}$  durch  $D(V) := \{(v,v); v \in V\}$  bzw.  $V^2 \setminus D(V)$  ersetzt, so spricht man von einem **gerichteten (Pseudo-/Multi-)Graphen (directed graph, digraph)**, und  $e \in E$  heißt eine **gerichtete Kante (arc)**. Ein gerichteter Pseudograph ist eine **Relation** auf  $V$ , die bei einem gerichteten Graphen **antireflexiv** ist. In dieser Sprechweise ist ein Pseudograph eine **symmetrische**, ein Graph eine antireflexive, symmetrische Relation.

Schließlich kann auch die Bedingung, daß  $V$  (die Familie  $E$ ) endlich ist, weggelassen werden.

2. Es folgen einige weitere Begriffe: Zwei Ecken  $v_1, v_2 \in V$  sind **benachbart (adjacent)**, in Zeichen  $v_1 - v_2$ , wenn  $e := \{v_1, v_2\} \in E$ ;  $v_1$  und  $v_2$  heißen die **Endecken (end-vertices)** von  $e$ . Zwei Kanten  $e_1, e_2 \in E$  heißen **benachbart (adjacent)**, in Zeichen  $e_1 \cdot e_2$ , wenn sie genau eine Ecke gemein haben. Eine Ecke  $v \in V$  und eine Kante  $e \in E$  heißen **inzident (incident)**, wenn  $v \in e$ . □

## Kapitel 1. Mengen und Zahlen

*. . . daß die ganzen Zahlen sowohl getrennt, wie auch in ihrer actual unendlichen Totalität als ewige Ideen in intellectu Divino im höchsten Grade der Realität existieren.*

G. Cantor [11.5; S. 105]

Da in Definition 2.0 die (endliche) Eckenmenge  $V$  nicht weiter eingeschränkt war, andererseits Graphen mit verschiedenen Eckenmengen aber durchaus "im wesentlichen gleich" sein können, stellt sich die Frage, diesen Umstand mathematisch präzise zu fassen in Gestalt der *Gleichwertigkeit*. Diese mengentheoretischen Grundlagen werden in Abschnitt 3 zusammengestellt. Da im einleitenden Kapitel auch Probleme mit natürlichen Zahlen auftauchen (Anzahlbegriff, Lösung einer Rekursion), wird in Abschnitt 4 hierauf eingegangen.

### 3. Mengen

In Situationen wo es bei der Betrachtung von Gegenständen auf die objektive Gleichheit nicht ankommt, wird im täglichen Leben wie in der Mathematik eine subjektive *Gleichwertigkeit* zugrunde gelegt. So werden die Münzen in einer Supermarktkasse im wahrsten Sinne des Wortes nach ihrem Wert geordnet, und es kommt bei der Auszahlung von Wechselgeld nicht darauf an, welche individuellen Münzen zurückgegeben werden. Für einen Sammler können Münzen gleichen nominalen Wertes aber durchaus verschiedenen Wert besitzen. Auch wird der Rezensent bei einer Tagespresseschau nicht alle Zeitungen des Tages in die Hand nehmen, sondern von jeder Tageszeitung nur einen *Repräsentanten*. Wir werden nun eine mathematische Struktur herleiten, die diese Begriffe korrekt und effizient modelliert.

#### 3.1. Zerlegungen

Der Aufteilung der Münzen in der Kasse entspricht folgende Definition.

**Definition 3.1.** Sei  $M$  eine Menge. Ein Mengensystem  $\mathcal{M} \subset 2^M := \{N \subset M\}$  ( $2^M$  ist die Potenzmenge (power set) von  $M$ ) heißt *Zerlegung (decomposition, partition)* von  $M$ ,

wenn folgendes erfüllt ist:

- (o)  $\emptyset \notin \mathcal{M}$ ;
- (i)  $M = \bigcup \mathcal{M}$ ;
- (ii)  $\forall X, Y \in \mathcal{M}, X \neq Y: X \cap Y = \emptyset$ .

(Jedes Element von  $\mathcal{M}$  heißt ein **Block** der Zerlegung; jedes Element eines Blockes  $X$  heißt ein **Repräsentant** von  $X$ .) ■

Die Kasse ist dabei ein physisches Modell dieser Definition (vorausgesetzt, es ist genügend Wechselgeld vorhanden): (o) steht für die Ökonomie, d.h. es sind nicht mehr Fächer vorhanden als Münzwerte existieren, (i) bedeutet, daß die Münzen alle auf die Fächer verteilt sind, und (ii) ergibt sich aus der Fächerung der Kasse.

Jede Menge  $M$  besitzt die **diskrete** oder **strenge (strict)** Zerlegung  $\mathcal{M} = \{\{x\}; x \in M\}$ , jede nicht-leere Menge die **triviale** Zerlegung  $\mathcal{M} = \{M\}$ ; genau für einelementige Mengen stimmen die beiden überein. Durch die Eigenschaften (i) und (ii) einer Zerlegung ergibt sich die Korrektheit der Definition der Abbildung  $m$  durch  $\{(x, X); M \ni x \in X \in \mathcal{M}\}$ . Ein **Repräsentanten-System** der Zerlegung ist ein  $P \subset M$ , so daß  $m: P \rightarrow \mathcal{M}$  bijektiv ist, d.h. es enthält zu jedem Block genau einen Repräsentanten. (Für unendliche Mengen benötigt man zum Nachweis der Existenz eines Repräsentanten-Systems das *Auswahlaxiom*.)

### 3.2. Gleichwertigkeit

Die Elemente ein und desselben Blocks der Zerlegung  $\mathcal{M}$  heißen **gleichwertig (equivalent)**; ist  $\mathcal{M}$  die diskrete Zerlegung, so heißen sie **gleich (equal)**. Insbesondere sind zwei Elemente  $x$  und  $y$  von  $M$  gleichwertig bezüglich der Zerlegung  $\mathcal{M}$  genau dann, wenn  $m(x) = m(y)$ ; wir schreiben  $x \approx y$ , bzw.  $x = y$ , wenn  $m = \{\cdot\}$ . Aus Euklids Axiom 1 ("Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich."; [O.4; S. 3]) ergibt sich die **Transitivität** von  $\approx$ :

$$x \approx z \wedge y \approx z \Rightarrow x \approx y. \quad (T)$$

Außerdem ist

$$m(x) = \{y \in M; x \approx y\} =: \tilde{x},$$

denn  $y \in m(x) \Leftrightarrow y \in m(x) \cap m(y) \Leftrightarrow y \in M \wedge m(x) = m(y) \Leftrightarrow y \in M \wedge x \approx y$ . Das charakterisiert die Gleichwertigkeit vollständig:

**Definition 3.2.** Sei  $M$  eine Menge. Ein  $R \subset \binom{M}{2}$  mit

$$\{\{x,z\},\{y,z\}\} \in \binom{R}{2} \Rightarrow \{x,y\} \in R$$

heißt **Äquivalenz-Relation** auf  $M$ . ■

Die Quintessenz ist also, daß Gleichwertigkeit (von  $x$  und  $y$ ) durch Vergleich mit einem Standard ( $z$ ) festgestellt werden kann; vgl. das Urkilogramm in Sèvres.

**Konventionen.** (o)  $x,y \in M: x=y \Rightarrow x \approx y$  (Gleiches ist auch **gleichwertig**; **Reflexivität** von  $\approx$ ),

$$(i) \{x,y\} \in R: x \approx y \text{ (} x \text{ und } y \text{ sind } \mathbf{gleichwertig} \text{ bezüglich } R\text{)}.$$

( $\approx$  repräsentiert eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf  $M$ .)

**Vorsicht!** In der nicht-mathematischen Sprache entspricht "dasselbe" der Gleichheit und "das gleiche" der Gleichwertigkeit.

Wie gesehen, führt jede Zerlegung zu einer Äquivalenz-Relation. Für die strenge Zerlegung ist  $R = \emptyset$  und  $x \approx y \Leftrightarrow x = y$  (Bsp.: Fingerabdruck, DNA-Test ?); für die triviale Zerlegung ist  $R = \binom{M}{2}$  und  $\forall x,y \in M: x \approx y$  (Bsp.: Grundgesetz der Bundesrepublik Deutschland, Artikel 3, Absatz 1: "Alle Menschen sind vor dem Gesetz gleich.").

Für  $x \in M$  heißt  $\overset{\approx}{X} := \{y \in M; x \approx y\}$  die zu  $x$  gehörige **Äquivalenz-Klasse** (bezüglich  $R$ ). Die Menge der Äquivalenz-Klassen bildet eine Zerlegung von  $M$  (Aufgabe 6 a), und es gilt der **Hauptsatz über Äquivalenz-Relationen**

**Theorem 3.3.** Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge der Zerlegungen einer Menge  $M$  und der Menge der Äquivalenz-Relationen auf  $M$ . ■

Für den *Beweis* siehe Aufgabe 6 b.

Ein **Repräsentanten-System** der Äquivalenz-Relation  $R$  ist entsprechend ein  $PCM$ , so daß die Abbildung  $P \rightarrow \{\overset{\approx}{X}; X \in M\}$ ,  $x \mapsto \overset{\approx}{X}$ , bijektiv ist.

Es folgt die Anwendung auf Graphen.

**Definition 3.4.** Die Graphen  $G$  und  $G'$  heißen **isomorph (isomorphic)**, in Zeichen  $G \sim G'$ , wenn es einen **Isomorphismus** von  $G$  nach  $G'$  gibt, d. h. eine Bijektion  $\iota: V(G) \rightarrow V(G')$ , so daß

$$\{v_1, v_2\} \in E(G) \Leftrightarrow \{\iota(v_1), \iota(v_2)\} \in E(G'). \quad \blacksquare$$

Durch die Isomorphie ist eine Äquivalenz-Relation auf der Klasse der Graphen gegeben. Die Äquivalenz-Klassen heißen auch **nicht-indizierte Graphen (unlabeled graphs)**, da man bei einer Zeichnung natürlich auf die Beschriftung der Punkte verzichten kann. Nicht-indizierte Graphen können, müssen aber nicht, in mehrere isomorphe **indizierte (labeled)** Graphen der **Ordnung (order)**  $n \in \mathbb{N}_0$  zerfallen, das sind Graphen mit Eckenmenge  $V = [n]$ . So gibt es nur einen indizierten vollständigen Graphen  $K_3$ , während es drei indizierte Weggraphen der Ordnung 3 gibt, je nachdem welche Ecke den Grad 2 hat. Zu jedem indizierten Graphen gibt es unzählige isomorphe Graphen, zu denen es wiederum unzählige verschiedene (beschriftete) Zeichnungen gibt. Die Anzahl der indizierten Graphen ist natürlich gleich der Anzahl der Teilmengen von  $\binom{[n]}{2}$ . In wieviele Äquivalenz-Klassen diese zerfallen, ist nicht unmittelbar klar (vgl. Aufgabe 7). In jedem Fall lohnt es sich, als weitere Anwendung des Begriffs der Gleichwertigkeit den **Anzahlbegriff** unter die Lupe zu nehmen.

#### 4. Zahlen

##### 4.1. Anzahl

Da isomorphe Graphen insbesondere eine Bijektion zwischen ihren Eckenmengen besitzen, überträgt sich der Begriff der **Ordnung** von indizierten Graphen auf Graphen.

**Lemma 4.1.** Zwei Mengen  $M$  und  $N$  heißen **gleichmächtig (equipotent)**, in Zeichen  $M \sim N$ , wenn es eine Bijektion zwischen  $M$  und  $N$  gibt. Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenz-Relation. Eine Menge  $M$  heißt **endlich (finite)**, wenn  $\exists n \in \mathbb{N}_0: M \sim [n]$ ; sie heißt **abzählbar unendlich (countably infinite)**, wenn  $M \sim \mathbb{N}$ . Abzählbar unendliche Mengen sind nicht endlich. Für endliche Mengen  $M \sim [n]$  heißt  $|M| := n$  die **Anzahl der Elemente**. Für einen Graphen  $G$  heißt  $|G| := |V(G)|$  die **Ordnung (order)** des Graphen,  $\|G\| := |E(G)|$  seine **Größe (size)**. Der **Grad (degree)** einer Ecke  $v \in V(G)$  ist  $\deg(v) := |\{e \in E(G); v \in e\}|$ .  $\blacksquare$

*Beweis.* Die Eigenschaft, Äquivalenz-Relation zu sein folgt für  $\sim$  aus den Regeln für Bijektionen.

Um die Existenz einer Bijektion zwischen  $[m]$  und  $[n]$  oder zwischen  $[m]$  und  $\mathbb{N}$  für  $\mathbb{N}_0 \ni m < n \in \mathbb{N}$  ausschließen zu können, benötigen wir das sogenannte **Schubfachprinzip** (**pigeon hole principle**):

**Theorem 4.2.** Ist  $\mathbb{N}_0 \ni m < n \in \mathbb{N}$ , so gibt es kein injektives  $s \in [m]^{[n]}$ . ■

*Beweis.* Wir führen einen Induktionsbeweis über  $m$ . Für  $m=0$  ist  $[m]^{[n]} = \emptyset$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Seien nun  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $n > m+1$  und sei  $s \in [m+1]^{[n]}$  injektiv. Es ist  $m+1 \in s([n])$ , denn sonst wäre  $s \in [m]^{[n]}$ , also nicht injektiv nach Induktionsannahme, da  $n > m$ . Daher gibt es ein, wegen der Injektivität von  $s$  eindeutiges,  $k \in [n]$  mit  $s(k) = m+1$ . Sei  $s' := s \setminus \{(n, s(n)), (k, m+1)\} \cup \{(n, m+1), (k, s(n))\}$ . Dann ist auch  $s' \in [m+1]^{[n]}$  injektiv und damit auch  $s' \upharpoonright [n-1] \in [m]^{[n-1]}$ , ein Widerspruch zur Induktionsannahme, da  $n-1 > m$ . □

*Bemerkung.* Dieses Prinzip wird an verschiedenen Stellen Dirichlet zugeschrieben, der es 1834 *Schubfachprinzip* genannt haben soll (anonymes Zitat: "Wenn ich mehr Socken als Schubfächer habe (und wenn ich ordentlich bin und all meine Socken in meine Kommode lege), dann gibt es sicher ein Schubfach, welches mindestens zwei Socken enthält."). Die früheste Verwendung (ohne Formulierung) des Prinzips die ich finden konnte, ist in [O.5; S.334]. Die früheste explizite Formulierung und Erwähnung des Begriffs *Dirichletsche Schubfächer* fand ich in [O.6; S.454]. Für einige Anwendungen siehe Aufgabe 8. □

Weiter im *Beweis* von Lemma 4.1. Daß  $[m]$  und  $[n]$  nicht gleichmächtig sein können für  $m \neq n$  ist nun klar. Für ein bijektives  $s \in [m]^{[n]}$  wäre  $s \upharpoonright [m+1] \in [m]^{[m+1]}$  injektiv, im Widerspruch zu Theorem 4.2. □

Der in Lemma 4.1 eingeführte Anzahlbegriff stimmt mit dem naiven überein. Zum Beispiel gelten für endliche Mengen  $M$  und  $N$  Aussagen wie  $M \subset N \Rightarrow |M| \leq |N|$  oder

$$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|, \quad (\text{PIE})$$

letzteres, da  $M \cap N$  auf der rechten Seite zweimal, nämlich in  $M$  und  $N$ , eingeschlossen

ist, auf der linken aber nur einmal und daher rechts einmal ausgeschlossen werden muß (Einschluß-Ausschluß-Prinzip, *principle of inclusion-exclusion*). Etwas anspruchsvollere Anzahlprobleme finden sich in Aufgabe 9 a.

Für die Chinesischen Ringe mit  $V = B^n = ([2]_0)^n$  und  $\{s, t\} \in E$  genau dann, wenn  $s$  und  $t$  sich durch den zulässigen Zug eines Ringes unterscheiden, ist  $B^n$  ein Graph der Ordnung  $|B^n| = 2^n$  und der Größe  $\|B^n\| = 2^n - 1$ . Die Ecken  $0 \dots 0$  und  $10 \dots 0$  haben den Grad 1 (sie heißen **Endecken, end-vertices**), alle anderen haben den Grad 2.

#### 4.2. Rekursion

Bisher waren wir bei der (eindeutigen) Lösung von Rekursionsschemata, wie (0) und (1) in Abschnitt 1.0, mit geschicktem Raten ausgekommen. Diese Methode, ausgehend von der Rekursionsvorschrift die ersten Werte zu bestimmen, daraus eine allgemeine Formel abzuleiten und dann die Äquivalenz dieser Formel mit der Rekursion durch vollständige Induktion zu beweisen, bewährt sich auch bei folgender Aussage.

**Lemma 4.3 a)** *Es seien  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b, \alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ . Dann ist*

$$\alpha_0 = 0 \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0: \alpha_{n+1} = a \alpha_n + b_n$$

*äquivalent zu*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0: \alpha_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b_{n-1-k}.$$

**b)** *Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$ . Dann ist*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0: \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \frac{b^n - a^n}{b - a}. \quad \blacksquare$$

**Beweis.** Wir beweisen "⇒" durch Induktion. Der Fall  $n=0$  ist klar. Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ ; dann ist

$$\alpha_{n+1} = a \alpha_n + b_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b_{n-1-k} + b_n = \sum_{k=0}^n a^k b_{n-k}.$$

Für "⇐" ist der Fall  $\alpha_0$  klar. Für  $n \in \mathbb{N}_0$  haben wir

$$\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^n a^k b_{n-k} = a \sum_{k=0}^{n-1} a^k b_{n-1-k} + b_n = a \alpha_n + b_n.$$

**b)** Für  $n \in \mathbb{N}_0$  rechnen wir (**Teleskopsumme**):

$$(b - a) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} - \sum_{k=1}^n a^k b^{n-k} = b^n - a^n. \quad \square$$

Anders ist die Situation bei der in Aufgabe 9 b in der Definition der *Binomialkoeffizienten* auftretende Fakultätsfunktion  $k! := \eta(k)$  ( $k$  **Fakultät**,  $k$  **factorial**), die durch das Rekursionsschema

$$\eta(0) = 1, \forall k \in \mathbb{N}_0: \eta(k+1) = (k+1) \cdot \eta(k) \quad (0)$$

festgelegt sein soll. Dieses Rekursionsschema wird auch erfüllt von der Anzahl der **Permutationen**, d. h. Bijektionen, auf  $[k]$ . (Es gibt genau eine (bijektive) Abbildung von  $[0]$  nach  $[0]$ ; für jede Bijektion  $\sigma$  in  $[k+1]$  gibt es  $k+1$  Werte für  $\sigma(k+1)$ , und  $\sigma \upharpoonright [k]$  ist eine Bijektion von  $[k]$  nach  $[k+1] \setminus \{\sigma(k+1)\} \sim [k]$ .) Um zu zeigen, daß hierdurch in eindeutiger Weise eine Abbildung von  $\mathbb{N}_0$  nach  $\mathbb{N}$  gegeben ist, benötigt man den **Rekursionssatz**, auf dem auch alle anderen Rechenregeln auf  $\mathbb{N}_{(0)}$  beruhen, also (endliche) Summen und Produkte, die Potenzierung u. s. w.

**Rekursionssatz.** Seien  $M$  eine Menge,  $\eta_0 \in M$  und  $\varphi: \mathbb{N}_0 \times M \rightarrow M$ . Dann gibt es genau eine Abbildung  $\eta: \mathbb{N}_0 \rightarrow M$ , die der Rekursion

$$\eta(0) = \eta_0, \forall k \in \mathbb{N}_0: \eta(k+1) = \varphi(k, \eta(k))$$

genügt. ■

**Beweis. Eindeutigkeit:** Die Abbildungen  $\eta, \mu: \mathbb{N}_0 \rightarrow M$  mögen beide das Rekursionsschema erfüllen. Dann ist  $\eta(0) = \eta_0 = \mu(0)$ , und wenn  $\eta(k) = \mu(k)$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ , so gilt  $\eta(k+1) = \varphi(k, \eta(k)) = \varphi(k, \mu(k)) = \mu(k+1)$ . Mittels vollständiger Induktion folgt  $\eta = \mu$ .

**Existenz.** Die gesuchte Abbildung  $\eta \subset \mathbb{N}_0 \times M$  muß folgende Eigenschaften haben:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \exists \eta_k \in M: (k, \eta_k) \in \eta, \quad (A)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \forall m_1, m_2 \in M: (k, m_1), (k, m_2) \in \eta \Rightarrow m_1 = m_2, \quad (B)$$

$$(0, \eta_0) \in \eta \wedge \forall k \in \mathbb{N}_0 \forall m \in M: (k, m) \in \eta \Rightarrow (k+1, \varphi(k, m)) \in \eta. \quad (C)$$

Die Bedingung (C) ist z. B. für  $\mathbb{N}_0 \times M$  erfüllt. Wir wählen daher

$$\eta := \bigcap \{ \mu \subset \mathbb{N}_0 \times M; \mu \text{ erfüllt (C)} \}.$$

Offenbar erfüllt dann auch  $\eta$  die Bedingung (C). Wir beweisen (A) und (B) simultan durch vollständige Induktion nach  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Es ist  $(0, \eta_0) \in \eta$ . Angenommen,  $(0, \mu_0) \in \eta$  mit  $M \ni \mu_0 \neq \eta_0$ . Sei  $\mu := \eta \setminus \{(0, \mu_0)\}$ . Dann ist  $(0, \eta_0) \in \mu$  und wenn  $(k, m) \in \mu$  ist, so auch  $(k+1, \varphi(k, m)) \in \mu$ , da kein Element der Gestalt  $(k+1, l)$  aus  $\eta$  entfernt worden ist. Also erfüllt  $\mu$  die Bedingung (C). Dann ist aber  $\eta \subset \mu$ , ein Widerspruch.

Für den Induktionsschluß setze  $\eta_{k+1} := \varphi(k, \eta_k)$ . Wäre  $(k+1, m) \in \eta$  für ein  $M \ni m \neq \eta_{k+1}$ , so sei  $\mu := \eta \setminus \{(k+1, m)\}$ . Wieder ist dann (C) für  $\mu$  erfüllt ( $(0, \eta_0)$  wurde nicht herausgenommen, und  $(k+1, m) \neq (k+1, \varphi(k, \eta_k))$ ). Hiermit ergibt sich der Widerspruch  $\eta \subset \mu$ .  $\square$

Im Falle der Fakultät setzt man  $\eta_0 = 1$  und  $\varphi: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: (k, n) \mapsto (k+1) \cdot n$ . Für das Beispiel der *Subfakultät* siehe Aufgabe 10. Damit hat man nun auch die eindeutige Existenz der Lösung eines Rekursionsschemas  $(1+m)$ -ter Ordnung (recurrence of order  $1+m$ ),  $m \in \mathbb{N}_0$ .

**Theorem 4.4.** Es seien  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $M$  eine Menge,  $f: \mathbb{N}_0 \times M_0^{1+m} \rightarrow M$  und  $(x_0, \dots, x_m) \in M_0^{1+m}$ . Dann gibt es genau ein  $x \in M^{\mathbb{N}_0}$ , welches das Rekursionsschema

$$\forall k \in [m+1]_0: x(k) = x_k \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0: x(n+m+1) = f(n; x(n), \dots, x(n+m))$$

erfüllt.  $\blacksquare$

*Beweis.* Ersetzt man im Rekursionssatz die Menge  $M$  durch  $M_0^{1+m}$  und setzt  $\eta_0 = (x_0, \dots, x_m)$ , sowie  $\varphi(k, (\xi_0, \dots, \xi_m)) = (\xi_1, \dots, \xi_m, f(k; \xi_0, \dots, \xi_m))$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\xi_0, \dots, \xi_m \in M$ , so garantiert dieser die Existenz genau einer Abbildung  $\eta: \mathbb{N}_0 \rightarrow M_0^{1+m}$ , die der Rekursion

$$\eta(0) = (x_0, \dots, x_m), \forall k \in \mathbb{N}_0: \eta(k+1) = (\eta(k)_1, \dots, \eta(k)_m, f(k; \eta(k)_0, \dots, \eta(k)_m)) \quad (*)$$

genügt.

Erfüllt  $x \in M^{\mathbb{N}_0}$  das Rekursionsschema des Theorems, so erfüllt  $\eta: \mathbb{N}_0 \rightarrow M_0^{1+m}$ ,  $k \mapsto (x(k), \dots, x(k+m))$  das Schema (\*). Wegen der Eindeutigkeit ist  $x$  wegen  $x(k) = \eta(k)_0$  ebenfalls eindeutig.

Umgekehrt folgt aus der Existenz von  $\eta$  welches (\*) genügt, daß durch  $x(k) = \eta(k)_0$  eine Lösung des Rekursionsschemas des Theorems gegeben ist. Dazu zeigt man durch Induktion nach  $k$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \forall l \in [m+1]_0 \quad \forall k \in [l+1]_0: \eta(n+k)_{l-k} = \eta(n)_l.$$

Der Fall  $k=0$  ist trivial. Für  $k \in [l]_0$  ist  $\eta(n+k+1)_{l-k-1} = \eta(n+k)_{l-k} = \eta(n)_l$ .

Insbesondere ist also  $\eta(n+l)_0 = \eta(n)_l$ , also  $x(n+l) = \eta(n)_l$ . Damit ist ( $n=0$ )

$$\forall k \in [m+1]_0: x(k) = \eta(0)_k = x_k$$

und  $\forall n \in \mathbb{N}_0: x(n+m+1) = \eta(n+1)_m = f(n; \eta(n)_0, \dots, \eta(n)_m) = f(n; x(n), \dots, x(n+m))$ .  $\square$

Ein Anwendungsbeispiel ist die durch Beispiel 0.1 definierte **Fibonacci-Folge**  $F$  mit dem **Keim (seed)**  $(F_0, F_1) = (0, 1)$  und der Rekursionsrelation  $\forall n \in \mathbb{N}_0: F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ . In der Tat schrieb Fibonacci zum Schluß erstaunlicher Weise "und auf diese Weise kann man es für den Fall unendlich vieler Monatsanzahlen machen". (Namensgebung durch Édouard Lucas, vgl. [O.7; S. 3]. Wählt man zur gleichen Rekursionsrelation den Keim  $(2, 1)$ , so erhält man die **Lucas-Folge**  $L$ .) Fibonacci-Zahlen, die Elemente der Folge, tauchen in der Mathematik in unglaublich vielfältiger Weise auf. Es gibt sogar ein regelmäßig erscheinendes Journal, Das *Fibonacci Quarterly*, das wissenschaftlichen Arbeiten zu diesem Thema gewidmet ist (vgl. [V.12]).

#### 4.3. Metrische Räume

Als letzten grundlegenden Begriff für Graphen wollen wir den *Abstand* zweier Ecken festlegen und damit eine *metrische Struktur* einführen.

**Definition 4.5.** Sei  $M$  eine Menge. Eine Abbildung  $d: \binom{M}{2} \rightarrow ]0, \infty[$ , welche die **Dreiecksungleichung**

$$\forall m_1, m_2, m \in M: d(m_1, m_2) \leq d(m_1, m) + d(m, m_2)$$

erfüllt (wir schreiben dabei  $d(m_1, m_2)$  für  $d(\{m_1, m_2\})$  und setzen  $d(m, m) = 0$ ), heißt eine **Abstandsfunktion (distance function)** auf  $M$ ;  $(M, d)$  heißt ein **metrischer Raum** und  $d(m_1, m_2)$  ist der **Abstand (distance)** zwischen  $m_1$  und  $m_2$ . Der **Durchmesser (diameter)** von  $(M, d)$  ist  $\text{diam}(M) := \sup\{d(m_1, m_2); m_1, m_2 \in M\}$ . ■

**Bemerkung.** Üblicherweise wird  $d$  auf  $M^2$  definiert und die **Symmetrie**  $d((m_1, m_2)) = d((m_2, m_1))$  gefordert; das ist ziemlich absurd. Außerdem kommt das Wort "distance" aus dem Lateinischen von *dis* (auseinander) und *stare* (stehen), bedeutet also voneinander wegstehen. Vergleiche auch das deutsche *Ab-stand*. Eine Abstandsfunktion  $d$  sollte daher von vorneherein positiv sein.

Bei seiner Einführung der Axiome eines metrischen Raumes in seiner Dissertation [O.10; S. 30] verwendet M. Fréchet (1878(Maligny)–1973(Paris)) den Ausdruck *écart* (lat.: exquartare = vierteilen) für den Abstand, später aber [O.11; S. 61f] nennt er den metrischen Raum *espace distancié*, nachdem er (zurecht) F. Hausdorffs (1868(Breslau)–1942(Bonn)) Bezeichnung *metrischer Raum* ([O.12; S. 211] als *frappante* und wegen

seiner andersartigen Verwendung in der Geometrie zu einer *confusion regrettable* führend kritisiert. Den Abstand hatte Hausdorff als *Entfernung* bezeichnet. Sein metrischer Raum hat sich durchgesetzt. Wann allerdings die Abstands-, Entfernungs-, *cart*-Funktion den heute leider oft üblichen Namen **Metrik (metric)** erhielt, konnte ich nicht feststellen. □

Für eine Anwendung der Definition auf sogenannte *Codes*, siehe Aufgabe 11. Für Graphen haben wir nun folgendes.

**Definition 4.6.** Ein **Weg (path)** (der **Länge (length)**  $k \in \mathbb{N}_0$ ) in einem Graphen  $G = (V, E)$  ist ein  $\{v_0, \dots, v_k\} \in \binom{V}{1+k}$  mit  $\forall i \in [k]: \{v_{i-1}, v_i\} \in E$ . Die Ecken  $v_0$  und  $v_k$  heißen **Endecken (end-vertices)** des Weges, der dann auch  $v_0, v_k$ -**Weg** genannt wird. Der Graph heißt **zusammenhängend (connected)**, wenn es zu je zwei Ecken  $u$  und  $v$  aus  $V$  einen  $u, v$ -Weg in  $G$  gibt. ■

**Lemma 4.7.** Ist  $G$  ein zusammenhängender Graph, so definiert

$$d(u, v) := \min\{k \in \mathbb{N}_0; \text{es gibt einen } u, v\text{-Weg der Länge } k \text{ in } G\}$$

eine **Metrik auf  $V$** , und  $\text{diam}(V)$  heißt der **Durchmesser** von  $G$ . ■

**Bemerkung.** Da jede nicht-leere endliche Teilmenge von  $\mathbb{N}_0$  ein Maximum besitzt (vollständige Induktion!), ist für jeden nicht-trivialen Graph  $\text{diam}(V) = \max\{d(u, v); u, v \in V\} \in \mathbb{N}_0$ . Analog heißt  $\varepsilon(v) := \max\{d(u, v); u \in V\} \in \mathbb{N}_0$  die **Exzentrizität (eccentricity)** von  $v \in V$ , und es ist  $\text{diam}(V) = \max\{\varepsilon(v); v \in V\}$ . □

**Beweis** von Lemma 4.7. Wegen des Zusammenhangs von  $G$  gibt es zu  $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$  mindestens einen  $u, v$ -Weg in  $G$ , so daß wegen der Wohlordnung von  $\mathbb{N}_0$  (mindestens) ein kürzester Weg existiert; nach Definition ist dessen Länge nicht 0. Es ist noch die Dreiecksungleichung nachzuweisen.

Es seien  $\{u_0, \dots, u_k\}$  und  $\{v_0, \dots, v_l\}$  kürzeste  $u, w$ - bzw.  $v, w$ -Wege. Dann ist  $N := \{x \in [k+l]_0; u_x \in \{v_0, \dots, v_l\}\} \neq \emptyset$ , da  $u_k = w = v_l$ . Seien  $n$  das Minimum von  $N$  und  $u_n = v_m$ . Dann ist  $\{u_0, \dots, u_n, v_{m-1}, \dots, v_0\}$  ein  $u, v$ -Weg der Länge kleiner oder gleich  $k+l = d(u, w) + d(v, w)$ . □

**Bemerkung.** In der Dreiecksungleichung  $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$  gilt Gleichheit genau dann, wenn  $w$  auf einem kürzesten  $u, v$ -Weg liegt; man zerteile diesen bei  $w$ . □

Mit diesen Definitionen können wir die metrischen Eigenschaften von  $(B^n, d)$  untersuchen. Zum Beispiel ist nach den Überlegungen in 1.0 der Durchmesser  $\text{diam}(B^n) = 2^n - 1$ , und er wird realisiert von den beiden Ecken  $0 \dots 0$  und  $10 \dots 0$ , deren Exzentrizität damit ebenfalls  $2^n - 1$  beträgt; wegen Proposition 1.1 ist  $\varepsilon(1 \dots 1) = \frac{1}{3} (2^{n+1} - 1 - (n \text{ gerade}))$ . Außerdem können wir nach dem *durchschnittlichen Abstand*  $\bar{\gamma}_n$  eines Zustands  $t \in B^n$  von  $s = 0 := 0 \dots 0 \in B^n$  fragen. Die Gesamtlänge aller kürzesten Wege ist wegen des Gros-Codes

$$\gamma_n = \sum_{t \in B^n} d(0, t) = \sum_{k=0}^{2^n-1} k = \frac{1}{2} 2^n (2^n - 1),$$

so daß für  $n \in \mathbb{N}$ :  $\bar{\gamma}_n = \frac{\gamma_n}{2^n - 1} = 2^{n-1} \approx \frac{1}{2} \text{diam}(B^n)$ , letzteres für große  $n$ . (Bei der Durchschnittsbildung wollen wir nur durch die Anzahl der nicht-trivialen Fälle dividieren.)

Auf ähnliche Weise kann man den durchschnittlichen Abstand  $\bar{\delta}_n$  zweier beliebiger Zustände bestimmen (siehe Aufgabe 12). Ein *asymptotisches* Argument, d. h. die Betrachtung von großen  $n$ , mit dem man das Ergebnis überprüfen kann, ist das folgende.

Wir definieren  $\Delta_n := \frac{\bar{\delta}_n}{\text{diam}(B^n)}$ . Für zwei beliebige Zustände  $s, t \in B^{n+1}$  ist  $s_{n+1} \neq t_{n+1}$  mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$ . Für solche Paare ist der durchschnittliche Abstand gleich  $\bar{\delta}_n$ . Ihr Beitrag zu  $\Delta_{n+1}$  ist daher  $\frac{1}{4} \Delta_n$ . (Der Durchmesser von  $B^{n+1}$  ist ungefähr zweimal so groß wie der von  $B^n$ .) Die anderen Zustandspaare haben einen durchschnittlichen Abstand von  $2\bar{\gamma}_n + 1 = 2^n + 1$ , so daß ihr Beitrag etwa  $\frac{1}{4}$  ist. Zusammen haben wir  $\Delta_{n+1} \approx \frac{1}{4} (\Delta_n + 1)$ , woraus  $\Delta_n \approx \frac{1}{3}$  für große  $n$  folgt.



## Kapitel 2. Spezielle Graphen

*Indeed it seems to me that an exact homology exists between painting and poetry on the one hand and modern chemistry and modern algebra on the other.*

J. J. Sylvester [I.1; S. 66]

Die im einleitenden Kapitel angedeuteten topologischen, metrischen und algorithmischen Fragestellungen lassen sich an einigen Klassen von Graphen leicht konkretisieren. Hierzu gehören die in Abschnitt 5 zu betrachtenden *Weg-, Kreis- und vollständigen Graphen* und die für die Anwendungen besonders wichtigen *Bäume* des Abschnitts 6. Sodann wird die wichtige Aufgabe der Konstruktion von *Paarungen* im Rahmen der *bipartiten Graphen* des Abschnitts 7 behandelt. Schließlich werden wir uns in Abschnitt 8 insbesondere für die aus dem Turm von Hanoi und seinen Varianten hervorgehenden *Turm-Graphen* interessieren.

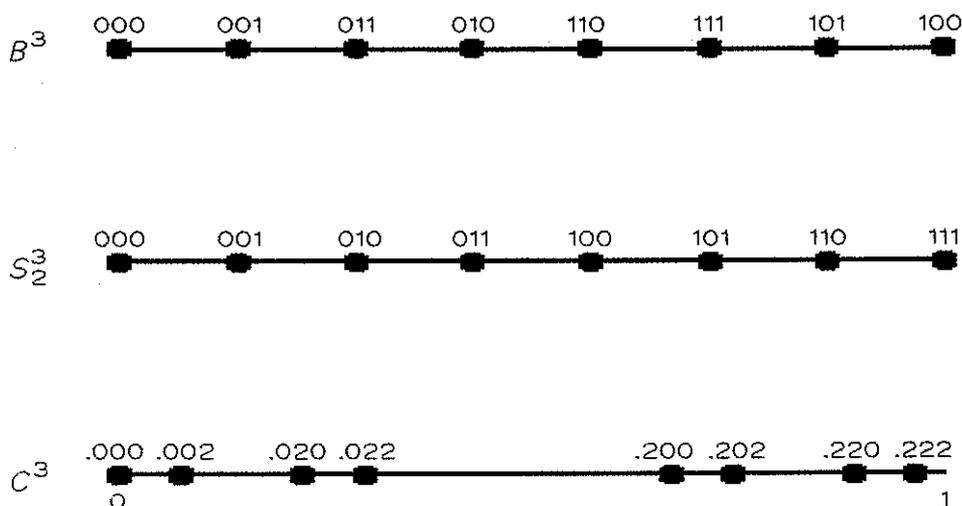
### 5. Weg-, Kreis- und vollständige Graphen

Wie im einleitenden Kapitel dargelegt, führt das *Königsberger Brückenproblem*, der Ausgangspunkt der Graphentheorie, auf das allgemeinere Problem zu entscheiden, ob ein Multigraph **(semi-)eulersch** (**(semi-)eulerian**) ist, d. h. ob er einen *eulerschen Kantenzug* oder sogar einen *geschlossenen* solchen enthält. Dazu ein paar Definitionen: Eine **Kantenfolge (walk)** der **Länge**  $k \in \mathbb{N}_0$  in  $G$  ist eine endliche Folge  $v \in V(G)_0^{k+1}$  mit der Eigenschaft  $\forall i \in [k]: e_i := \{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$ ; ein **Kantenzug (trail)** ist eine Kantenfolge mit  $\{e_1, \dots, e_k\} \in \binom{E}{k}$ . (Ein Weg ist also ein injektiver Kantenzug.) Eine Kantenfolge (ein Kantenzug) heißt **geschlossen (closed walk, bzw. closed trail oder circuit)**, wenn  $v_k = v_0$  ist, und ein Kantenzug heißt **eulersch (eulerian)**, wenn seine Länge  $\|G\|$  ist. Dabei sagen wir, ein Multigraph *enthält* einen Kantenzug in folgendem Sinne: Kantenfolgen können selbst als (Multi-)Graphen  $G' = (V', E')$  aufgefaßt werden ( $V' = \{v_0, \dots, v_k\}$ ,  $E' = \{e_1, \dots, e_k\}$ , bzw.  $E' = (e_i)_{i \in [k]}$ ; im Falle eines Weges nennt man das einen **Weggraphen (path graph)**, dessen Äquivalenz-Klasse mit  $P_{1+k}$  (weil  $|P_{1+k}| = 1+k$ ) bezeichnet wird); wir sagen ein Graph  $G'$  sei ein **Teilgraph (subgraph)** von  $G$  (oder  $G'$  ist in  $G$  **enthalten (contained)**,  $G' \subset G$ ), wenn  $V' \subset V$  und  $E' \subset E$ . Für die Lösung des Königsberger Brückenproblems siehe Aufgabe 13.

Bei Hamiltons *Icosian Game* handelt es sich im wesentlichen darum, einen *hamiltonschen Kreis* auf einem *dodekaedrischen Graphen (dodecahedral graph)* zu finden, d. h.

alle 20 Ecken (daher "icosian") eines Pentagondodekaeders genau einmal zu besuchen und zum Ausgangspunkt zurückzukehren. (Das **1-Skelett (1-skeleton)** eines Polyeders ist der Graph, dessen Ecken und Kanten die Ecken und Kanten des Polyeders sind.) Ein **Kreis (cycle)** (der **Länge**  $k+1$ ) auf einem Graphen  $G$  ist ein geschlossener Kantenzug  $C \subset G$  mit  $|C|=k+1=||C||$ . (Ein **Kreis(graph)**, dessen Äquivalenzklasse mit  $C_{k+1}$  bezeichnet wird, ist also ein Weggraph der Länge  $k \in \mathbb{N}_0$ , an den eine weitere Kante von  $v_k$  nach  $v_0$  angehängt wurde. In (einfachen) Graphen gibt es nur Kreise der Länge 3 (genannt **Dreiecke, triangles**) und größer; in Multigraphen können auch Kreise der Länge 2 (**Zweiecke oder Mändchen, lunes**) und der Länge 1, die Schlingen (loops) auftreten.) Ein Weg (Kreis) in  $G$  heißt **hamiltonsch (hamiltonian)**, wenn er die Länge  $|G|-1$  ( $|G|$ ) hat. Ein Graph der einen hamiltonschen Kreis (Weg) enthält heißt **(semi-)hamiltonsch**.

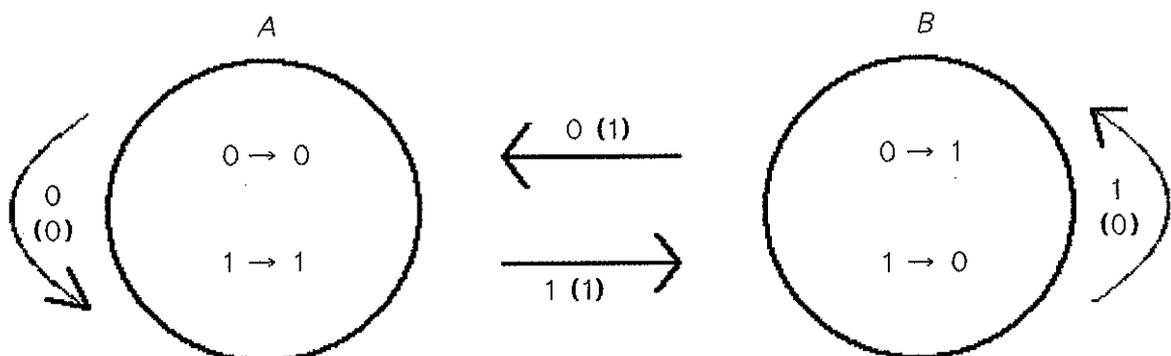
Interpretieren wir die Binärzahlen aus  $([2]_0)^n$  als die Ecken eines  $n$ -**Würfels ( $n$ -cube)** in einem kartesischen Koordinatensystem, so befinden sich die Kanten des zugehörigen 1-Skeletts dieses  $n$ -Würfels zwischen solchen Zahlen, die sich um genau ein Bit unterscheiden. Nennen wir diesen Graphen  $K^n$ . Dann erzeugt die Folge der Ecken des Graphen  $B^n$  einen hamiltonschen Kreis auf  $K^n$ , d.h. der Graph  $B^n$  ist (nach Hinzufügen der schließenden Kante) isomorph zu einem solchen bzw. zu  $P_{2^n}$ . Ein anderer zu  $B^n$  isomorpher Graph ist der **Sierpiński-Graph**  $S_2^n$  (nach W. Sierpiński, 1882(Warschau)-1969 (Warschau)) der Aufgabe 14. Interpretiert man die 0 und die 1 in der Eckenmenge  $([2]_0)^n$  von  $S_2^n$  als die **ternären Ziffern (ternary digits, tits)** 0 bzw. 2 der reellen Zahlen in  $[0,1[$ , so ergeben sich die Teilmengen  $C^n$  von  $[0,1[$ , deren abzuschließende Vereinigung die berühmte **Cantor-Menge**  $C$  bildet (nach G. Cantor, 1845(St. Petersburg)-1918(Halle); vgl. [II.5]); siehe Figur 9.



Figur 9

Neben anderen bemerkenswerten Eigenschaften besitzt die Menge  $C$  die eines **Fraktals**, d. h. sie hat eine nicht-ganzzahlige **Hausdorff-Dimension**  $\alpha$ , nämlich  $\alpha = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0.631$ . (Dies folgt aus der Tatsache, daß die Menge  $C$  **selbstähnlich (self-similar)** ist in dem Sinne daß eine Hälfte ihrer Elemente, nämlich jene der Form  $0.0\dots$ , die gleiche Struktur aufweist wie ganz  $C$ , lediglich unter Verkürzung der Abstände auf ein Drittel, so daß  $\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha$ .)

Weiters ist es interessant anzumerken, daß der Isomorphismus  $\iota_n$  zwischen  $S_2^n$  und  $B^n$  (vgl. Aufgabe 14 b) durch einen **endlichen Automaten** realisiert werden kann. (Ein **endlicher Automat (finite automaton)** ist ein 7-Tupel  $(Z, z_0, E, \Sigma, \delta, T, \lambda)$ , worin  $Z$  eine endliche Menge von Zuständen,  $z_0 \in Z$  ein Anfangszustand,  $E \subset Z$  eine Menge von Endzuständen,  $\Sigma$  ein Eingabe-,  $T$  ein Ausgabe-Alphabet und  $\delta, \lambda: Z \times \Sigma \rightarrow Z$  bzw.  $T$  Überführungs-, bzw. Ausgabefunktionen sind.) Er besteht aus zwei Zuständen,  $A$  und  $B$ , liest, beginnend in  $A$ , die Eingabe  $s \in S_2^n$  von links nach rechts, also von  $s_n$  bis  $s_1$  und druckt die Ausgabe  $b = \iota_n(s)$  ebenfalls von links nach rechts, d. h. von  $b_n$  bis  $b_1$ . Ist die Eingabe in Zustand  $A$  gleich 0, so druckt er 0 und bleibt in  $A$ , falls sie 1 ist, druckt er 1 und geht nach  $B$ . Die Eingabe 1 in Zustand  $B$  wird durch Ausdruck 0 und Verbleiben in  $B$  beantwortet, Eingabe 0 durch Ausdruck 1 und Wechsel nach  $A$ . In Figur 10 ist dieser Automat durch einen ecken- und kantenindizierten gerichteten Pseudographen dargestellt, worin der inverse Isomorphismus durch die Werte in Klammern realisiert wird. Die Korrektheit dieses Algorithmus linearer Komplexität kann durch Rückgriff auf die Induktion in der Lösung der Aufgabe 14 b bewiesen werden, wenn man beobachtet, daß die Anfangseingabe 0 den Automaten unverändert läßt, während Anfangseingabe 1 die nachfolgenden Eingabe-Bits (Ausgabe-Bits für die inverse Abbildung) vertauscht.



Figur 10

Da zwei Ecken in  $S_2^n$  genau dann benachbart sind, wenn sich die durch Interpretation als Binärzahl ergebenden Zahlen um genau 1 unterscheiden und da 0 auf 0 abgebildet wird, realisieren der obige Automat den Gray-Code und der umgekehrte den Gros-Code.

Die in Aufgabe 11 b angestellten Überlegungen zu 1-perfekten Codes übertragen sich durch Isomorphie auf  $S_2^n$  und stellen damit einen Spezialfall der entsprechenden Aussagen für  $S_p^n$  dar; vgl. [O.8].

Eine weitere interessante Eigenschaft der Sierpiński-Graphen  $S_p^n$  zur **Basis (base)**  $p \in \mathbb{N}_0$  und zum **Exponenten (exponent)**  $n \in \mathbb{N}_0$  (eingeführt in [O.9]) ist ihre  $p$ -**Färbbarkeit** (entdeckt von Danielle Arett (Mitteilung von Suzanne Dorée) und Daniele Parrisè), d. h. wir können jede Ecke in einer von  $p$  Farben malen, so daß keine zwei benachbarten Ecken die gleiche Farbe haben. Formal: ein Graph  $G = (V, E)$  ist  $p$ -**färbbar** ( $p$ -**colorable**),  $p \in \mathbb{N}_0$ , wenn

$$\exists f: V \rightarrow [p] \forall v_1, v_2 \in V: \{v_1, v_2\} \in E \Rightarrow f(v_1) \neq f(v_2).$$

Die kleinste solche Zahl  $p$  heißt die **chromatische Zahl (chromatic number)**  $\chi(G)$ , und  $G$  heißt dann  $p$ -**chromatisch** ( $p$ -**chromatic**). Aus der Definition von  $S_p^n$  in Aufgabe 14 folgt durch Induktion leicht, daß  $s_1 \neq s_1'$  für benachbarte  $s, s' \in S_p^n$ , so daß  $f(s) = s_1$  eine  $p$ -**Färbung** von  $S_p^n$  darstellt. Außerdem enthält  $S_p^n$  nach Aufgabe 14 c eine isomorphe Kopie des vollständigen Graphen  $S_p^1$ , dessen Isomorphie-Klasse mit  $K_p$  bezeichnet wird und der offensichtlich nicht durch weniger als  $p$  Farben gefärbt werden kann. Also ist  $\chi(S_p^n) = p$ .

Nur der leere Graph hat die chromatische Zahl 0, genau alle nichtleeren Graphen ohne Kanten haben die chromatische Zahl 1. Ist  $\chi(G) = 2$ , so zerfällt  $V(G)$  in zwei Äquivalenz-Klassen von Ecken gleicher Färbung. Ist jede der  $m \in \mathbb{N}$  Ecken der einen mit jeder der  $m \leq n \in \mathbb{N}$  Ecken der anderen Klasse durch eine Kante verbunden, so spricht man vom **vollständig bipartiten (complete bipartite)** Graphen der Ordnung  $m+n$  (2-färbbare Graphen heißen auch **bipartit**), dessen Isomorphie-Klasse mit  $K_{m,n}$  bezeichnet wird; ist  $m=1$ , so heißt der Graph auch **Stern (star)** (hierzu gehört auch  $K_{1,0} := K_1$ ).

Färbungen von Graphen sind ein wichtiges Thema weil das berühmte **Vier-Farben-Problem** äquivalent ist zu der Aussage, daß alle *planaren* Graphen 4-färbbar sind. Dabei heißt ein Graph **planar**, wenn eine überschneidungsfreie Zeichnung in der euklidischen Ebene (oder auf einer Sphäre) realisiert werden kann (vgl. Abschnitt 0).

## 6. Bäume

Bipartite Graphen können keine Kreise ungerader Länge enthalten; hierdurch sind sie vollständig bestimmt; siehe Aufgabe 15. Noch einfacher sind Graphen, die überhaupt keine Kreise enthalten.

**Definition 6.0.** Ein kreisfreier Graph heißt ein **Wald (forest)**. Ein zusammenhängender Wald heißt ein **Baum (tree)**. ■

Der Begriff des Baums wurde vor genau 150 Jahren von A. Cayley in die Mathematik eingeführt (vgl. [I.1; S. 40]).

### 6.1. Grundlegende Eigenschaften von Bäumen

Auf der Menge  $V(G)$  der Ecken eines Graphen  $G$  definiert

$$u \sim v \Leftrightarrow \exists u, v\text{-Weg in } G$$

eine Äquivalenz-Relation. Die durch die zugehörigen Äquivalenz-Klassen induzierten Teilgraphen heißen (**Zusammenhangs-)Komponenten ((connected) components)** von  $G$ . (Eine Teilmenge  $V'$  von  $V(G)$  **induziert (induce)** den Teilgraphen  $G'$  von  $G$  mit  $V(G') = V'$  und  $E(G') = \{\{u, v\} \in E(G); u, v \in V'\}$ .) Ein nicht-trivialer Graph ist also genau dann zusammenhängend, wenn er genau eine Zusammenhangs-Komponente besitzt. In diesem Sinne sind Bäume die Zusammenhangs-Komponenten eines Waldes.

(Nicht-indizierte) Bäume der Ordnung 0 bis 2 sind nur die entsprechenden vollständigen Graphen  $K_0$  bis  $K_2$ . Der einzige Baum der Ordnung 3 ist der Weggraph  $P_3$  mit Durchmesser 2, da  $K_2$  und  $K_3$  die einzigen Graphen mit Durchmesser 1 sind und letzterer ein Dreieck ist. Zu  $P_4$  kommt als einziger Baum der Ordnung 4 noch der Stern  $K_{1,3}$  hinzu, der aus  $P_3$  durch Anhängen einer Kante an die zentrale Ecke entsteht. Analog erhält man neben  $P_5$  einen Baum der Ordnung 5 durch Anhängen einer Kante an eine der Nicht-Endecken von  $P_4$  (die beiden Alternativen hierbei sind natürlich isomorph), und einen weiteren als Stern  $K_{1,4}$ . (Letzterer entspricht dem Methan-Molekül, dem Prototyp der Alkane mit der chemischen Summenformel  $C_n H_{2n+2}$  (Methan, Äthan, Propan, Butan, Pentan, Hexan, etc.), deren Struktur durch einen Baum der Ordnung  $n+2$  dargestellt wird mit  $n$  Kohlenstoffatomen als Ecken vom Grad 4 (**Wertigkeit, valence**) die in

einer Reihe angeordnet von Wasserstoffatomen als Ecken vom Grad 1 umgeben sind. (Eine Ecke vom Grad 1 eines Baumes heißt auch **Blatt (leaf)**.) Für die Bäume der Ordnung 6 siehe Aufgabe 16. Der allgemeine Zusammenhang zwischen Ordnung und Größe von Bäumen und Wäldern wird in Aufgabe 17 hergestellt.

Bei der Definition der Komponenten eines Graphen reichen  $u, v$ -**Kantenfolgen** aus, das sind Kantenfolgen, die  $u$  und  $v$  enthalten.

**Lemma 6.1.** *Sei  $G$  ein Graph,  $u, v \in V(G)$ . Dann enthält  $G$  genau dann einen  $u, v$ -Weg, wenn  $G$  eine  $u, v$ -Kantenfolge enthält.* ■

*Beweis.* Jeder  $u, v$ -Weg ist auch eine  $u, v$ -Kantenfolge. Sei, in naheliegender Schreibweise,  $x_0 x_1 \cdots x_{k-1} x_k$  eine  $u, v$ -Kantenfolge, für die wir  $u = x_0, x_k = v$  annehmen dürfen. Wenn dies ein Weg ist, so sind wir fertig. Sonst gibt es ein Paar  $0 \leq i < j \leq k$  mit  $x_i = x_j$ . Dann ist aber  $x_0 \cdots x_i x_{j+1} \cdots x_k$  eine  $u, v$ -Kantenfolge kleinerer Länge. Mit dem Prinzip des unendlichen Abstiegs ist damit gezeigt, daß es einen  $u, v$ -Weg gibt. □

*Bemerkungen.* 1. Der Beweis hat sogar gezeigt, daß jede  $u, v$ -Kantenfolge einen (höchstens gleichlangen)  $u, v$ -Weg enthält.

2. In Definition 4.6 und Lemma 4.7 hätte man daher den Zusammenhang auch über die Existenz von  $u, v$ -Kantenfolgen und

$$d(u, v) := \min\{k \in \mathbb{N}_0; \text{ es gibt eine } u, v\text{-Kantenfolge der Länge } k\}$$

definieren können. Dann wäre der Beweis der Dreiecksungleichung in Lemma 4.7 einfacher (man hänge zwei kürzeste Kantenfolgen aneinander). Andererseits ist aber eine kürzeste  $u, v$ -Kantenfolge stets ein kürzester  $u, v$ -Weg, so daß diese Definition ziemlich künstlich wäre.

3. Zwar enthält nach Aufgabe 15 a jede geschlossene Kantenfolge  $K$  ungerader Länge einen Kreis, solche gerader Länge aber nicht unbedingt (z. B.  $v_0 v_1 v_0$ ). Wenn jedoch eine Kante  $e = \{x, y\}$  genau einmal (oder allgemeiner ungerade mal) in  $K$  auftaucht, so gibt es eine  $x, y$ -Kantenfolge in  $K \setminus \{e\}$ , die nach Bemerkung 1 einen  $x, y$ -Weg enthält, der zusammen mit  $e$  einen Kreis (gerader Länge) in  $K$  bildet. □

Das führt zu einer wichtigen Charakterisierung von Bäumen.

**Theorem 6.2.** *Ein Graph ist ein Baum genau dann, wenn jedes Eckenpaar durch genau einen Weg verbunden ist.* ■

*Beweis.* Ist  $T$  ein Baum und sind  $u, v \in V(T)$ , so existiert wegen des Zusammenhangs (mindestens) ein kürzester  $u, v$ -Weg  $P$ . Gäbe es einen von  $P$  verschiedenen  $u, v$ -Weg  $Q$ , so entstünde durch Aneinanderhängen von  $P$  und dem rückwärts durchlaufenen  $Q$  eine geschlossene Kantenfolge, wobei mindestens eine Kante nur einmal durchlaufen wird (sonst wären  $P$  und  $Q$  gleich); nach Bemerkung 3 enthielte  $T$  dann einen Kreis. □

Falls in einem Graphen  $G$  je zwei Ecken durch genau einen Weg verbunden sind, so ist er klarerweise zusammenhängend und kann auch keinen Kreis enthalten. □

**Korollar 6.3.** *Ein Graph  $G$  ist genau dann ein Baum, wenn  $G$  kreisfrei ist, das Hinzufügen irgendeiner neuen Kante aber (genau) einen Kreis erzeugt.* ■

*Beweis.* Ist  $G$  ein Baum, so ist er kreisfrei, und das Hinzufügen einer neuen Kante  $e$  erzeugt einen Kreis, da deren Endecken bereits vorher durch einen Weg verbunden waren. Zwei verschiedene Kreise die  $e$  enthalten lassen bei Weglassen von  $e$  eine geschlossene Kantenfolge zurück, der nach Bemerkung 3 vor Theorem 6.2 einen Kreis in  $G$  enthalten müßte. Ist umgekehrt  $G$  kreisfrei und nicht zusammenhängend, so erzeugt eine Kante zwischen zwei verschiedenen Zusammenhangskomponenten keinen Kreis, da diese sonst auch vorher schon verbunden gewesen wären. □

Eine mögliche Anwendung von Theorem 6.2 liegt in Aufgabe 18.

Eine weitere Charakterisierung von Bäumen erhält man aus folgender Notation.

**Definition 6.4.** *Es sei  $G$  ein zusammenhängender Graph,  $e \in E(G)$ . Dann heißt  $e$  eine **Brücke (cut-edge)**, wenn der Graph  $(V(G), E(G) \setminus \{e\})$  nicht zusammenhängend ist.* ■

**Theorem 6.5.** *Ein zusammenhängender Graph ist ein Baum genau dann wenn jede Kante von  $G$  eine Brücke ist.* ■

*Beweis.* Sei  $G$  ein Baum und  $uv \in E(G)$ . Dann ist  $uv$  auch ein  $u,v$ -Weg in  $G$ , nach Theorem 6.2 der einzige. Bei Weglassen von  $uv$  ist also der verbleibende Graph nicht zusammenhängend, d. h.  $uv$  ist eine Brücke.

Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph der kein Baum ist, also einen Kreis  $C$  enthält. Sei  $e \in E(C) \subset E(G)$ . Wir zeigen, daß  $G$  auch ohne  $e$  zusammenhängend,  $e$  also keine Brücke ist. Seien also  $u, v \in V(G)$  und  $P$  ein  $u,v$ -Weg in  $G$ . Wenn  $P$  die Kante  $e$  nicht enthält, dann ist  $P$  auch ein  $u,v$ -Weg in  $G$  ohne  $e$ . Wenn hingegen  $xy = e \in E(P)$ , so ersetze man diese Kante in  $P$  durch den anderen  $x,y$ -Weg in  $C$ . Dadurch ergibt sich eine  $u,v$ -Kantenfolge in  $G$  ohne  $e$  und damit nach Lemma 6.1 ein  $u,v$ -Weg.  $\square$

## 6.2. Aufspannende Bäume und eine weitere Charakterisierung von Bäumen

**Definition 6.6.** Ein Teilgraph  $H$  eines Graphen  $G$  heißt **aufspannender Teilgraph (spanning subgraph)**, wenn  $V(H) = V(G)$ . Ist ein aufspannender Teilgraph ein Baum, so heißt er **aufspannender Baum (spanning tree)**.  $\blacksquare$

**Theorem 6.7.** Jeder zusammenhängende Graph  $G$  enthält einen aufspannenden Baum.  $\blacksquare$

*Beweis.* 1. Version: Sei  $H$  ein zusammenhängender aufspannender Teilgraph kleinster Größe (gibt es, da  $G$  aufspannender Teilgraph ist). Sei  $e \in E(H)$ . Wäre die Kante  $e$  keine Brücke von  $H$ , so könnten wir sie aus  $H$  entfernen und erhielten einen zusammenhängenden aufspannenden Teilgraphen von  $G$  geringerer Größe als  $H$ . Da dies ein Widerspruch ist, ist  $H$  nach Theorem 6.5 ein Baum.

2. Version: Induktion nach der Anzahl  $n \in \mathbb{N}_0$  der Kreise in  $G$ . Für  $n=0$  ist  $G$  sein eigener aufspannender Baum. Bei  $n+1$  Kreisen entfernen wir irgendeine Kante irgendeines Kreises  $C$  in  $G$ . Der entstehende Graph ist zusammenhängend und hat höchstens  $n$  Kreise, besitzt also nach Induktionsannahme einen aufspannenden Baum, der aber auch  $G$  aufspannt.  $\square$

*Bemerkung.* Die Existenz aufspannender Bäume für alle *unendlichen* zusammenhängenden Graphen ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

Hierzu einige Definitionen.

**Auswahlaxiom I.** Zu jeder Familie  $(M_k)_{k \in K}$  nichtleerer, paarweise disjunkter Mengen gibt es eine Menge  $M$ , die aus je einem Element  $m_k \in M_k$  zu jedem  $k \in K$  besteht. ■

**Auswahlaxiom II.** Zu jeder Familie  $(M_k)_{k \in K}$  nichtleerer Mengen gibt es eine Abbildung  $m: K \rightarrow \bigcup_{k \in K} M_k$  mit  $\forall k \in K: m(k) \in M_k$ . ■

Diese beiden Fassungen des Auswahlaxioms sind äquivalent: Für "II  $\Rightarrow$  I" setze  $M = m(K)$ , für "I  $\Rightarrow$  II" sei  $m$  eine nach I zu  $(\tilde{M}_k)_{k \in K}$  mit  $\tilde{M}_k := \{k\} \times M_k$  existierende Menge.

Dieses transfinites Axiom der Mengenlehre ist äquivalent zum *Zornschen Lemma* (nach M. Zorn, 1906(Hamburg)-1993(Bloomington, IN ?)) (siehe [IV.4; Kapitel 16]).

**Zornsches Lemma.** Sei  $(X, \leq)$  eine geordnete Menge, in der jede bezüglich  $\leq$  total geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt. Dann enthält  $X$  ein maximales Element. ■

Dabei heißt die Relation  $\leq$  auf  $X$  eine **Ordnung** (und  $(X, \leq)$  eine **geordnete Menge**), wenn

- für alle  $x, y, z \in X$ :
- (a)  $x \leq x$ , (Reflexivität)
  - (b)  $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ , (Antisymmetrie)
  - (c)  $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ; (Transitivität)

sie heißt **totale Ordnung** (und  $(X, \leq)$  **total geordnet**), wenn zusätzlich

- (d)  $x \leq y \vee y \leq x$ . (Totalität)

$a \in X$  heißt eine **obere Schranke** von  $T \subset X$ , wenn für alle  $x \in T: x \leq a$ .

$m \in X$  heißt ein **maximales Element** (von  $X$ ), wenn für alle  $x \in X: m \leq x \Rightarrow m = x$ .

Sei nun  $G$  ein zusammenhängender Graph und  $X = \{H \subset G; H \text{ ist ein Wald}\}$  mit der Teilgraph-Relation  $\subset$  als Ordnung. Sei  $Y \subset X$  total geordnet; dann ist  $UY := (\bigcup_{H \in Y} V(H), \bigcup_{H \in Y} E(H))$  obere Schranke von  $Y$ , denn  $UY \subset G$  und gäbe es einen Kreis  $C \subset UY$ , so läge  $C$ , da  $|C| \in \mathbb{N}$ , wegen der Totalität der Ordnung in einem  $H \in Y$ ; also ist  $UY \in X$ .

Sei nun  $\bar{H}$  maximales Element von  $X$  nach dem Zornschen Lemma. Wäre  $\bar{H}$  nicht  $G$  aufspannend, so könnte  $\bar{H}$  durch Hinzufügung einer Ecke  $v \in V(G) \setminus V(\bar{H})$  in  $X$  vergrößert werden. Wäre  $\bar{H}$  nicht zusammenhängend, so gäbe es wegen des Zusammenhangs von  $G$  eine Kante  $e \in E(G) \setminus E(\bar{H})$ , deren Hinzufügung zu  $\bar{H}$  keinen Kreis erzeugte, so daß  $\bar{H}$  in  $X$  vergrößert würde.

Wir beweisen jetzt die Gültigkeit des Auswahlaxioms I unter Voraussetzung der Existenz eines aufspannenden Baumes für einen beliebigen zusammenhängenden Graphen (Beweisidee von W. Imrich (Mitteilung 2007)). Zu  $\mathcal{M} := \{M_k; k \in K\}$  sei  $G$  der Graph gegeben durch  $V(G) = \{\Phi\} \cup \bigcup \mathcal{M} \cup \mathcal{M}$  und  $E(G) = \{\{\Phi, m\}; m \in \bigcup \mathcal{M}\} \cup \{\{m, M\}; m \in M \in \mathcal{M}\}$ . Da die  $M_k$  nicht leer sind, ist das ein (über Wege  $M - m - \Phi$ ) zusammenhängender Graph. Sei  $T$  ein  $G$  aufspannender Baum und

$$M = \{m \in \bigcup \mathcal{M}; M_k - m - \Phi \text{ ist ein } M_k, \Phi\text{-Weg in } T, k \in K\}. \quad \square$$

**Lemma 6.8.** *Ein Baum mit mindestens zwei Ecken enthält mindestens zwei Blätter. ■*

*Beweis.* 1. Version: Sei  $P$  ein längster Weg in dem Baum  $T$ . Dann ist seine Länge mindestens 1, so daß er zwei Ecken besitzt.

2. Version: Nach dem Handshaking-Lemma (Aufgabe 1 a) und mit Aufgabe 17 b folgt für die Anzahl  $n$  der Ecken vom Grad 1:

$$2|T| - 2 = 2\|T\| = \sum_{v \in V(T)} \deg(v) = \sum_{\substack{v \in V(T) \\ \deg(v)=1}} 1 + \sum_{\substack{v \in V(T) \\ \deg(v)>1}} \deg(v) \geq n + (|T| - n) \cdot 2 = 2|T| - n. \quad \square$$

*Bemerkungen.* 1. Der zweite Beweis zeigt, daß  $n=2$  genau für Weggraphen  $P_{1+k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , eintritt. Da  $n=|T| \Rightarrow 2\|T\| = n = \|T\| + 1 \Rightarrow |T| = \|T\| + 1 = 2$ , ergibt sich das andere Extrem zu  $n=|T|-1 = \|T\|$ , was genau von den Sternen  $K_{1,n}$  erfüllt wird. Aufgabe 19 b enthält eine weitere Extremaleigenschaft dieser beiden Typen von Bäumen.

2. Entfernt man ein Blatt von einem Baum, so entsteht ein Baum (jeweils um 1) kleinerer Ordnung und Größe. □

Eine weitere Folgerung von Lemma 6.8 ist in Aufgabe 20 b enthalten.

**Theorem 6.9.** *Sei  $G$  ein nichtleerer zusammenhängender Graph. Dann ist  $G$  genau dann ein Baum, wenn  $\|G\| = |G| - 1$ . ■*

*Beweis.* Daß die Gleichung für jeden nichtleeren Baum erfüllt ist, wurde in Aufgabe 17 a gezeigt. Sei nun  $G$  ein zusammenhängender Graph, der die Gleichung erfüllt. Sei  $T$  ein aufspannender Baum gemäß Theorem 6.7. Dann ist  $\|T\| = |T| - 1 = |G| - 1 = \|G\|$ , so daß  $T$  als Teilgraph von  $G$  die gleiche Ecken- und Kantenzahl wie  $G$  hat, folglich gleich  $G$  ist. □

### 6.3. Minimale aufspannende Bäume

Bislang hatten wir das Durchlaufen beliebiger Kanten in einem Graphen stets als gleich teuer aufgefaßt. Denkt man aber an U-Bahn-Netze mit unterschiedlichen Fahrzeiten zwischen den Stationen oder an Straßennetze mit unterschiedlichen Entfernungen zwischen verbundenen Orten, so wird man auf das Konzept des *gewichteten Graphen* (besser: *bewichteter Graph*, denn nicht der Graph, sondern seine Kanten tragen Gewichte) geführt.

**Definition 6.10.** Eine Abbildung  $w: E \rightarrow \mathbb{N}$  nennt man eine **Gewichtsfunktion (weight function)** auf dem Graphen  $G=(V,E)$ . Man nennt  $(G,w)$  einen **gewichteten (weighted) Graphen**. Die Zahl  $w(G) := \sum_{e \in E} w(e)$  heißt das **(Gesamt-)Gewicht ((total) weight)** von  $G$ . ■

*Bemerkung.* Als Wertebereich von  $w$  kämen natürlich auch reelle Zahlen in Frage. Für praktische Probleme und auf dem Rechner kommen aber nur endlich viele (rationale) Werte in Betracht. Ebenso kann man nicht-positive Werte dadurch vermeiden, daß man alle Werte nach oben verschiebt, was das Gesamtgewicht aller aufspannenden Bäume um den gleichen Betrag erhöht, da alle die gleiche Kantenzahl  $|G|-1$  haben. □

Das Problem des *minimalen aufspannenden Baumes (minimal spanning tree problem)* ist nun, in einem zusammenhängenden gewichteten Graphen einen aufspannenden Baum geringsten Gewichts auszumachen. Dabei sind mitunter sehr viele aufspannende Bäume zu untersuchen (zum Beispiel, wenn man von einem gewichteten vollständigen Graphen  $([k], \binom{[k]}{2}, w)$  ausgeht). Dies wird im sogenannten **Greedy algorithm** ("gieriger" Algorithmus) vermieden, der auf der Idee einer alternativen Konstruktion der Gros-Folge  $g$  in Abschnitt 1.0 basiert: Nehmen wir an, wir haben einen Vorrat an **Buchstaben (letters)** (oder **Symbolen**), d. h. eine höchstens abzählbar unendliche Menge  $\mathcal{A}$ , **Alphabet** genannt, und wir werden aufgefordert, ein **Wort** (oder eine **Zeichenfolge, string**) unendlicher Länge, d. h. eine Folge  $\sigma \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ , zu konstruieren, die keine unmittelbare Wiederholung (oder **Quadrat, square**) enthält, d. h. es gibt kein  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $l \in \mathbb{N}$  mit

$$\forall k \in \{m+1, \dots, m+l\}: \sigma_{k+l} = \sigma_k.$$

Wenn wir  $\mathcal{A} = \mathbb{N}$  setzen und den anscheinend ökonomischen Weg einschlagen, sukzessive

$a_k$  als die kleinste Zahl zu wählen mit der Eigenschaft, daß  $(a_1, \dots, a_k)$  kein Quadrat enthält, so erhalten wir  $a_k = g_k$ , denn die Folge  $a$  erfüllt die Rekursion (3) in Abschnitt 1.0. Die Folge  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist dann **quadratfrei (square-free)** (Aufgabe 21; vgl. [V.19]).

Analog verfahren wir zur Konstruktion eines aufspannenden Baumes in einem zusammenhängenden gewichteten Graphen: Man beginne in irgendeiner Ecke. Bei jedem Folgeschritt fügt man die billigste Kante an den wachsenden Baum an, die eine darin enthaltene Ecke mit einer noch nicht enthaltenen Ecke des Graphen verbindet. Es ist klar, daß hierbei nach endlich vielen (nämlich  $|G|$ ) Schritten ein aufspannender Baum entsteht. Er hat in der Tat minimales Gesamt-Gewicht:

**Theorem 6.11.** *Sei  $T$  ein aufspannender Baum des gewichteten Graphen  $(G, w)$  wie er durch den Greedy algorithm erzeugt wird. Dann gilt  $w(T) \leq w(T')$  für jeden aufspannenden Baum  $T'$  von  $G$ .* ■

*Beweis.* Für  $n := |G|$  seien  $e_1, \dots, e_{n-1}$  die in dieser Reihenfolge ausgewählten Kanten von  $T$ . Für  $T' \neq T$  sei  $e_k = \{x, y\}$ ,  $k \in [n-1]$ , die erste Kante die nicht zu  $T'$  gehört und  $x$  ihre Endecke von der aus  $e_k$  im Algorithmus ausgewählt wurde. Sei  $P$  der (einzige)  $y, x$ -Weg in  $T'$  und hierin  $f$  die Kante mit Endecke  $x$ . Nach Konstruktion des Algorithmus ist  $w(f) \geq w(e_k)$ . Ergänzt man  $T'$  um die Kante  $e_k$ , so entsteht ein Kreis, der  $f$  enthält. Nimmt man  $f$  heraus, so ergibt sich daher ein aufspannender Baum  $T''$ , der (mindestens) eine Kante mehr in der Abfolge  $e_1, \dots, e_{n-1}$  gemeinsam hat mit  $T$  als  $T'$  und für den  $w(T'') \leq w(T')$  gilt. Nun wendet man diese Prozedur auf  $T''$  anstelle von  $T'$  an und gelangt nach endlich vielen Schritten zu  $w(T) \leq w(T')$ . □

*Bemerkung.* 1. Der Greedy algorithm wird oft Prim's Algorithmus (1957) genannt. Er wurde möglicherweise aber schon 1930 von Jarník vorgeschlagen (vgl. [IV.3; S. 178]).  
2. Eine Variante (Kruskal's Algorithmus, J. Kruskal (1956)) zur Bestimmung eines minimalen aufspannenden Waldes (Baums) eines (zusammenhängenden) Graphen besteht darin, vom leeren Wald ausgehend die jeweils billigste Kante hinzuzufügen, die nicht zur Entstehung eines Kreises führt.