Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Detlef Dürr

Wintersemester 2016/17
Blatt 11
23.12.2016

Übungen zur Stochastik

11.1 Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz einer zum Parameter $\alpha > 0$ exponentialverteilten Zufallgröße!

11.2 Wir betrachten $\lfloor \alpha L^d \rfloor$ auf $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]^d \subset \mathbb{R}^d$ gleichverteilte Punkte ($d \in \mathbb{N}$, $L, \alpha > 0$). Mit wachsendem L nimmt die Zahl der Punkte also gleichermaßen wie das Volumen des von ihnen gefüllten Bereichs zu, die Punktdichte bleibt im Mittel konstant α. Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ messbar und beschränkt und $N_A^{(L)}$ die Zahl der Punkte in A, wenn jeder einzelne auf $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]^d$ gleichverteilt ist.

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(N_A^{(L)} = k)$ für $k \in \mathbb{N}_0$!

(b) Bestimmen Sie $\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}(N_A^{(L)} = k)$ für $k \in \mathbb{N}_0$!
(Es kommt eine Poissonverteilung mit von α und A abhängigem Parameter heraus.)

(c) $A, B \subset \mathbb{R}^d$ seien disjunkte beschränkte messbare Mengen. Bestimmen Sie

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}(N_A^{(L)} = k, N_B^{(L)} = l)$$

für $k, l \in \mathbb{N}_0$! Welches Ergebnis ist zu erwarten?

11.3 Zeigen Sie, dass die Summe $n \in \mathbb{N}$ unabhängiger, zum selben Parameter $\alpha > 0$ exponentialverteilter Zufallsgrößen gemäß der Dichte $\gamma_{\alpha,n}(x) := \frac{\alpha^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ verteilt ist!

11.4 $\tau_1, \tau_2, \ldots$ seien nichtnegative u.i.v. Zufallsgrößen, die man sich als Modell für die Brenndauern gleichartiger Glühbirnen vorstelle. Eine Glühbirne brenne im Mittel 1000 Stunden.

(a) Drücken Sie $\mathbb{E}\left(\frac{n}{\tau_1 + \ldots \tau_n}\right)$, die mittlere Zahl der pro Zeiteinheit verbrauchten Glühbirnen, über die Laplacetransformierte von τ_1 aus!
Hinweis: Verwenden Sie $\int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{x}$!

(b) Welches Ergebnis ist für $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{n}{\tau_1 + \ldots \tau_n}\right)$ zu erwarten? Rechnen Sie dies für den Fall nach, dass τ_k exponentialverteilt ist!

(c) Weiterhin sei die Brenndauer exponentialverteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen 3 Glühbirnen für 3000 Stunden?