# Übungen zur Stochastik

**7.1** Die Parzellierungen der Vergröberungen $r_k : [0,1[\to \mathbb{R}$ (Rademacher-Funktionen) erzeugen verschiedene $\sigma$-Algebren $\mathfrak{A}_k$ auf $[0,1[$.

(a) Man gebe die von $r_1$ und $r_2$ erzeugten $\sigma$-Algebren $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ an!

(b) Man zeige, dass $r_2$ nicht messbar bezüglich $\mathfrak{A}_1$ ist. Ebenso zeige man, dass $r_1$ nicht messbar bezüglich $\mathfrak{A}_2$ ist!

(c) Man zeige: Sei $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ messbar bezüglich $\mathfrak{A}_1$. Dann ist $f$ eine Funktion von $r_1$, d.h. $f(x) = F(r_1(x))$ für eine Funktion $F : \{0,1\} \to \mathbb{R}$.

**7.2** Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Borel-messbarer Funktionen auf $\mathbb{R}$, welche punktweise gegen eine Funktion $f$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $f$ ebenfalls Borel-messbar ist, d.h. dass die Messbarkeitseigenschaft abgeschlossen unter der Folgenbildung ist!

**7.3** Seien $f$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbare Abbildungen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$. „Fast sichere Konvergenz“ $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} f$ ist über die Bedingung

$$\lambda\Big(\{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}\Big) = 1$$

definiert, „Konvergenz in Wahrscheinlichkeit“, auch „stochastische Konvergenz“ genannt und z.B. als $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} f$ notiert, bedeutet

$$\forall\epsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}\right) = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass aus ersterer letztere folgt, indem Sie z. B. wie folgt vorgehen:

(a) Zeigen Sie für alle $\epsilon > 0$

$$\{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\} = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} \{x : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon\}\,!$$

Zusatzfrage am Rande: Kann man den Schnitt über alle $\epsilon > 0$ auch durch einen Schnitt über alle $\epsilon$ der Form $\frac{1}{l}$ mit $l \in \mathbb{N}$ ersetzen?

(b) Folgern Sie daraus und aus der fast sicheren Konvergenz, dass für alle $\epsilon > 0$

$$\lim_{m\to\infty} \lambda\left(\bigcap_{n\geq m} \{x : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon\}\right) = 1$$

gilt!

(c) Folgern Sie daraus die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit!

**7.4** Zeigen Sie direkt über die Definition der Messbarkeit, dass $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ messbar ist, und bestimmen Sie, ebenfalls direkt über die Definition, den Inhalt!