Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Detlef Dürr

Wintersemester 2016/17
Blatt 5
14.11.2016

Übungen zur Stochastik

5.1 Man erinnere sich an Aufgabe 4.1: Betrachtet wurde das n-malige Werfen einer Münze, wobei die Anzahl der Köpfe gezählt wurde. X_n bezeichne nun die Anzahl der Köpfe bei n Würfen. In der Aufgabe lernten Sie das $\sqrt{n}$-Gesetz am Beispiel von 100 Münzwürfen kennen. Das Gesetz besagt, dass die Schwankungsbreite der meisten, also typischen X_n von der Größenordung $\sqrt{n}$ ist, wobei die Schwankung um den Mittwelwert $\frac{n}{2}$ geschieht. Typischerweise sollte also gelten $|X_n - \frac{n}{2}| \leq \sqrt{n}$.
Zeigen Sie, dass die mit $\sqrt{n}$ skalierte Abweichung vom Mittel einer Normalverteilung folgt, also dass gilt:

$$\mathbb{P}\left(w_1 \leq \frac{X_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} \leq w_2\right) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{w_1}^{w_2} e^{-2x^2} dx \tag{1}$$

Hinweise:

(a) Bringen Sie die linke Seite der Gleichung (1) auf folgende Form: $\mathbb{P}(\ldots \leq X_n \leq \ldots)$

(b) Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit als Laplace-Wahrscheinlichkeit!

(c) Wenden Sie die bereits bekannte Näherungsformel an, welche mit Hilfe der Stirlingformel hergeleitet wurde:

$$\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}+x\sqrt{n}}}{2^n} \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} e^{-2x^2}$$

(d) Approximieren Sie die Summe mit einem geeigneten Integral!

5.2 Eine Nadel der Länge 5 wird der Länge nach zufällig auf eine Strecke der Länge 100 gelegt. Zufällig soll bedeuten, dass die Nadelmitte uniform auf der Strecke verteilt ist.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel einen gegebenen Punkt P auf der Strecke überdeckt?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel an einem Ende der Strecke übersteht?

5.3 *Über Unabhängigkeit*
Man werfe eine Münze und einen Würfel. Man denkt, dass Münzwurf und Würfelwurf unabhängig sind. Es gibt verschiedene Arten, diesen Gedanken zu formalisieren:

(a) Laplacemäßig: Bei einmaligem Werfen sind die Elementarereignisse die Paare $\omega = (i, j)$, $i = 0, 1$; $j = 1, \ldots, 6$. Man zeige, dass Münzwurf und Würfelwurf unabhängige Ereignisse ergeben!

(b) Trivialisiert: Man bildet den sogenannten Produktraum und die Produktwahrscheinlichkeit aus den Einzelereignisräumen, die den Münzwurf und den Würfelwurf beschreiben. Wir betrachten dazu $\Omega_M = \{0, 1\}$, $\mathrm{w}_M(i) = \frac{1}{2}$ und $\Omega_W = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $\mathrm{w}_W(k) = \frac{1}{6}$ und bilden nun die Produktmenge $\Omega = \Omega_M \times \Omega_W$ und die Produktwahrscheinlichkeit $\mathrm{w}((i, j)) = \mathrm{w}_M(i)\mathrm{w}_W(j)$. Man überlege sich, dass die Ereignisse unabhängig sind!

(c) Näher an der Wahrheit: Man betrachtet Vergröberungen eines zugrunde liegenden Ereignisraumes, des „Phasenraumes“ der Anfangsbedingungen, die die Münze wirbeln und den Würfel rollen lassen. Modellhaft lässt sich dies auf dem Phasenraum $\Omega = [0, 1)$ mit dem Typizitätsmaß λ als Inhalt von Teilmengen von Ω und den Vergröberungen r_1 (Rademacherfunktion) und w_1 ausführen. Münzwurf und Würfelwurf sind dann automatisch auf demselben Raum definiert. Diese Möglichkeit wurde in der Vorlesung vorgestellt, Sie sollten sie sich an dieser Stelle in Erinnerung rufen.

5.4 Wir betrachten eine unfaire Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ Kopf zeigt. In einer Münzwurfreihe der Länge n wird also typischerweise ungefähr $\frac{n}{3}$-mal Kopf erscheinen. Stellen Sie ein zu 3(c) analoges Modell mit „Wörterbuch“ für wiederholte Würfe einer solchen Münze auf!

5.5 $r_k : [0, 1) \to \{0, 1\}$ seien die Rademacherfunktionen.

(a) Zeigen Sie, dass $X := r_1 + r_2$ und $Y := r_1 r_3$ nicht unabhängig sind!

(b) Zeigen Sie, dass sie gegeben den Wert von r_1 unabhängig sind, d.h. dass

$$\lambda\left(\{X = i, Y = j\} \mid \{r_1 = k\}\right) = \lambda\left(\{X(x) = i\} \mid \{r_1 = k\}\right) \cdot \lambda\left(\{Y = j\} \mid \{r_1 = k\}\right)$$

für alle $i, j, k \in \{0, 1\}$ gilt! Dabei ist $\{Z = l\}$ eine Kurzschreibweise für $\{x : Z(x) = l\}$.