Prof. H.-J. Schneider
Mathematisches Institut
Universität München

WS 08/09

Hopfalgebren und Quantengruppen

Blatt 9, 19. Dezember

1. Seien A eine kommutative Hopfalgebra und $G = \mathrm{Sp}(A)$ das zu A gehörige Gruppenschema. Nach Vorlesung ist $\mathrm{Der}_\varepsilon(A,k)$ Liealgebra als Unterliealgebra von $(A^*)^-$. Sei $k[\tau] = k[T]/(T^2), \tau := \overline{T}$, die Algebra der dualen Zahlen mit k-Basis $1, \tau$, wobei $k[T]$ die Polynomalgebra in einer Unbestimmten T ist. Seien $\Delta, i_1, i_2 : k[\tau] \to k[\tau] \otimes k[\tau]$ die Algebrahomomorphismen mit $\Delta(\tau) = \tau \otimes \tau, i_1(\tau) = \tau \otimes 1, i_2(\tau) = 1 \otimes \tau$. Für $\alpha \in k$ sei $f_\alpha : k[\tau] \to k[\tau]$ der Algebrahomomorphismus mit $f_\alpha(\tau) = \alpha\tau$. Sei $\pi : k[\tau] \to k[\tau]$ der Algebrahomomorphismus mit $\pi(\tau) = 0$.

   Zeige:

   (a) $\mathrm{Der}_\varepsilon(A,k) \cong (A^+)/(A^+)^2$ als Vektorraum, wobei $A^+ = \mathrm{Ke}(\varepsilon : A \to k)$.

   (b) $\mathrm{Der}_\varepsilon(A,k) \to \mathrm{Lie}(G) := \mathrm{Ke}(G(\pi) : G(k[\tau]) \to G(k))$, $d \mapsto \varphi_d, \varphi(a) = \varepsilon(a) + d(a)\tau, \forall a \in A$, ist bijektiv.

   (c) $\mathrm{Lie}(G)$ ist Liealgebra, und $\mathrm{Der}_\varepsilon(A,k) \cong \mathrm{Lie}(G)$ als Liealgebren, wobei die Liealgebrastruktur auf $\mathrm{Lie}(G)$ wie folgt definiert ist: Seien $x, y \in \mathrm{Lie}(G)$, und $\alpha \in k$. Dann ist

      $x + y = xy$ in $\mathrm{Alg}(A, k[\tau])$,
      $\alpha x = G(f_\alpha)(x)$,
      $G(\Delta)([x,y]) = [g,h] := ghg^{-1}h^{-1}$ in der Gruppe $G(k[\tau])$ mit $g = G(i_1)(x), h = G(i_2)(y)$.

2. Berechne $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_n)$.

3. Berechne $\mathrm{Lie}(O_n)$.