Prof. H.-J. Schneider
Mathematisches Institut
Universität München

WS 08/09

Hopfalgebren und Quantengruppen

Blatt 8, 5. Dezember

1. Seien k eine Körper der Charakterisctik 0 und

$$A = k < x, y \mid yx - xy = 1 >$$

die Weyl-Algebra.

(a) Zeige: A ist einfach (Eine Algebra A heißt einfach, fallls 0 das einzige Ideal $\neq A$ von A ist).

(b) Seien $k[t]$ die Polynomalgebra in einer Unbestimmten t und $k[\widehat{t}, d]$ die von $\widehat{t}, d$ erzeugte Unteralgebra von $\mathrm{End}(k[t])$, wobei

$$\widehat{t}(f) = tf,\ d(f) = \text{ formale Ableitung von } f$$

für alle $f \in k[t]$ ist. Zeige: $A \cong k[\widehat{t}, d]$ als Algebren.

2. Seien V, W k-Vektorräume und $X, V_i \subset V$ und $Y, W_j \subset W, i \in I, j \in J$, Untervektorräume. Zeige in $V \otimes W$:

(a) $(\bigcap_{i\in I} V_i) \otimes W = \bigcap_{i\in I}(V_i \otimes W), V \otimes (\bigcap_{j\in J} W_j) = \bigcap_{j\in J}(V \otimes W_j)$.

(b) $(X \otimes W) \cap (V \otimes Y) = X \otimes Y$.

(c) Seien C eine Coalgebra und $C_i, i \in I$, eine Familie von Untercoalgebren. Zeige: $\bigcap_{i\in I} C_i$ ist Untercoalgebra von C.

3. Seien C eine endlichdimensionale Coalgebra, V ein Vektorraum, H eine endlichdimensionale Bialgebra und A eine Algebra. Zeige: Die in der Vorlesung definierten Abbildungen sind Bijektionen

(a) zwischen den C-Rechtcomodulstrukturen und den C^*-Linksmodulstrukturen auf V,

(b) zwischen den H-Rechtscomodulalgebrastrukturen und den H^*-Linksmodulalgebrastrukturen auf A.

4. Seien H eine Hopfalgebra und (A, δ) eine H-Rechtscomodulalgebra und

$$B := \{a \in A \mid\ a_{(0)} \otimes a_{(1)} = a \otimes 1\}.$$

Die Unteralgebra $B \subset A$ heißt Unteralgebra der *H-coinvarianten Elemente*. Die Ringerweiterung $B \subset A$ heißt *H-Galoiserweiterung* und A heißt *H-Galois*, falls die folgende kanonische k-lineare Abbildung

$$\mathrm{kan} : A \otimes_B A \to A \otimes H,\ x \otimes y \mapsto xy_{(0)} \otimes y_{(1)}$$

bijektiv ist.

Sei A eine H-Linksmodulalgebra. Zeige: $A \subset A\#H$ ist H-Galoiserweiterung.

5. Sei $k \subset L$ Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G im Sinne der Algebravorlesung. Dann operiert G auf L, und L wird dadurch eine $k[G]$-Linksmodulalgebra, also eine k^G-Rechtscomodulalgebra. Zeige: $k \subset L$ ist k^G-Galoiserweiterung.