Prof. H.-J. Schneider
Mathematisches Institut
Universität München

WS 08/09

Hopfalgebren und Quantengruppen

Blatt 7, 28. November

1. Zeige, dass die in der Vorlesung definierte Algebra $U_q(sl_2)$ Hopfalgebra ist mit

$$\Delta(E) = K \otimes E + E \otimes 1, \Delta(F) = 1 \otimes F + F \otimes K^{-1}, \Delta(K) = K \otimes K.$$

Ist $U_q(sl_2)$ auch Hopfalgebra mit

$$\Delta(E) = 1 \otimes E + E \otimes K, \Delta(F) = K^{-1} \otimes F + F \otimes 1, \Delta(K) = K \otimes K?$$

2. Sei H Bialgebra.

(a) Sei $H^{\text{op}} = H$ als Coalgebra mit folgender Algebrastruktur: Elemente aus H^{op} werden mit $h^{\text{op}} = h$ für alle $h \in H$ bezeichnet. Dann sei $x^{\text{op}} y^{\text{op}} = (yx)^{\text{op}}$ für all $x, y \in H$. Zeige: H^{op} ist Bialgebra.

(b) Sei $H^{\text{cop}} = H$ als Algebra mit folgender Coalgebrastruktur: Elemente aus H^{cop} werden mit $h^{\text{cop}} = h$ für alle $h \in H$ bezeichnet. Dann sei $\Delta_{H^{\text{cop}}}(x^{\text{cop}}) = (x_{(2)})^{\text{cop}} \otimes (x_{(1)})^{\text{cop}}$ für all $x, y \in H$. Zeige: H^{cop} ist Bialgebra.

(c) Sei H Hopfalgebra. Dann ist H^{opcop} Hopfalgebra.

(d) Sei H Hopfalgebra mit bijektiver Antipode. Dann sind H^{op} und H^{cop} Hopfalgebren.

3. Seien C eine Coalgebra, V ein C-Rechtscomodul und W ein Vektorraum. Betrachte $W \otimes C$ als C-Rechtscomodul vermöge $\text{id} \otimes \Delta$. Zeige:

$$\text{Hom}(V, W) \cong \mathcal{M}^C(V, W \otimes C), \; f \mapsto (v \mapsto f(v_{(0)}) \otimes v_{(1)}).$$