Prof. H.-J. Schneider
Mathematisches Institut
Universität München

WS 08/09

Hopfalgebren und Quantengruppen

Blatt 6, 21. November

1. Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra mit $H^* \cong k^n, n = \dim(H)$, als Algebren. Zeige: Es gibt eine Gruppe G mit $H \cong k[G]$ als Hopfalgebren.

2. Sei $\mathrm{Char}(k) = p > 0$. Sei $H = k\langle t \mid t^p = 0\rangle$ als Hopfalgebra mit $\Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t$. Zeige: $H^* \cong H$ als Hopfalgebren.

3. Seien $\mathrm{Char}(k) = p > 0$, $n, m \geq 1$ und $\alpha, \beta \in k$. Zeige, dass die Algebra $H = k\langle t \mid t^{p^{n+m}} = 0\rangle$ Hopfalgebra ist mit

$$\Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t + \alpha t^{p^n} \otimes t^{p^m} + \beta t^{p^m} \otimes t^{p^n},$$

und berechne für jede kommutative Algebra A die Gruppe $\mathrm{Alg}(H, A)$.

4. Seien H eine Hopfalgebra und H' eine endlichdimensionale Bialgebra. Zeige, daß H' Hopfalgebra ist, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
   (a) $H' \subset H$ ist Unterbialgebra, d.h. die Inklusionsabbildung $H' \to H$ ist Bialgebrahomomorphismus.
   (b) Es gibt einen surjektiven Bialgebrahomomorphsimus $H \to H'$.

5. Sei H eine Hopfalgebra. Wann ist die kanonische Abbildung $V \to V^{**}$ für jedes $V \in {}_H\mathcal{M}$ H-linkslinear?