Prof. H.-J. Schneider
Mathematisches Institut
Universität München WS 08/09

Hopfalgebren und Quantengruppen

Blatt 5, 14. November

1. Seien $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, A eine kommutative k-Algebra und $O_n(A) := \{Q \in M_n(A) \mid QQ^T = E\}$ die orthogonale Gruppe über A. Finde eine kommutative Hopfalgebra H und einen Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{Alg}(H, A) \cong O_n(A),$$

wobei $\mathrm{Alg}(H, A)$ Gruppe bezüglich der Faltung ist.

2.

(a) Sei H eine endlichdimensionale Bialgebra. Zeige: H^* ist Bialgebra mit der in der Vorlesung definierten Algebra- und Coalgebrastruktur.

(b) Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra mit Antipode S. Zeige: H^* mit der in (a) definierten Bialgebrastruktur ist Hopfalgebra mit Antipode S^*.

3. Sei H eine Bialgebra. Zeige, dass H genau dann Hopfalgebra ist, wenn die lineare Abbildung

$$\Phi : H \otimes H \to H \otimes H, \; x \otimes y \mapsto xy_1 \otimes y_2,$$

Isomorphismus ist. (Ebenso ist ein Monoid G genau dann Gruppe, wenn die Abbildung $G \times G \to G \times G, \; (x, y) \mapsto (xy, y)$, bijektiv ist.)