Prof. H.-J. Schneider
Mathematisches Institut
Universität München

WS 08/09

Hopfalgebren und Quantengruppen

Blatt 4, 7. November

1. Seien C, D Coalgebren und $\varphi : C \to D$ ein Coalgebrahomomorphismus. Zeige: $\mathrm{Ke}(\varphi)$ ist ein Coideal in C, und

$$C/\,\mathrm{Ke}(\varphi) \cong \mathrm{Bi}(\varphi)$$

als Coalgebren.

2. Seien n eine natürliche Zahl, ζ eine primitive n-te Einheitswurzel in k und $G = \langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung n. Zeige:

$$k[G]^* \cong k[G]$$

als Hopfalgebren.

3. Sei H eine Bialgebra. Sei

$$H^+ := \mathrm{Ke}(\varepsilon : H \to k) \text{ das Augmentationsideal von } H.$$

Zeige für $x \in H^+$:

$$\Delta(x) \in x \otimes 1 + 1 \otimes x + H^+ \otimes H^+.$$

4. Seien k ein Körper der Charakteristik 0, H eine Bialgebra und $0 \neq x$ ein primitives Element von H. Zeige:

$$1, x, x^2, \ldots \text{ sind linear unabhängig.}$$

5. Für eine Bialgebra H sei $P(H) = \{x \mid \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}$ die Menge der primitiven Elemente.

a) Sei G eine Gruppe und $k[G]$ die Gruppenalgebra als Hopfalgebra mit $\Delta(g) = g \otimes g$ für alle $g \in G$. Zeige: $P(k[G]) = 0$.

b) Sei G eine endliche Gruppe. Zeige: $P(k^G) = \mathrm{Gr}(G, k^+)$, wobei k^+ die additive Gruppe von k ist.

c) Sei $k[T]$ die Polynomalgebra in der Unbestimmten T als Hopfalgebra mit primitivem T. Berechne $P(k[T])$ falls $\mathrm{Char}(k) = 0$ und falls $\mathrm{Char}(k) = p > 0$.