Prof. H.-J. Schneider
Mathematisches Institut
Universität München

WS 08/09

Hopfalgebren und Quantengruppen

Blatt 3, 31. Oktober

Für Ringe A, B bezeichnet ${}_A\mathcal{M}_B$ die Kategorie der (A, B)-Bimoduln.

1. Seien R, S Ringe und $P \in {}_R\mathcal{M}_S, Q \in {}_S\mathcal{M}_R$, so dass

$$P \otimes_S Q \cong R \text{ in } {}_R\mathcal{M}_R,\ Q \otimes_R P \cong S \text{ in } {}_S\mathcal{M}_S.$$

Dann sind $Q \otimes_R - : {}_R\mathcal{M} \to {}_S\mathcal{M}$ und $P \otimes_S - : {}_S\mathcal{M} \to {}_R\mathcal{M}$ zueinander quasiinverse Äquivalenzen.

2. Seien R ein Ring, $n \geq 1$, und $S = M_n(R)$. Im Matrizenring $M_n(R)$ seien E_{ij} für alle $1 \leq i, j \leq n$ die üblichen Basiselemente, also $E_{ij} = (\delta_{ir}\delta_{js})_{1 \leq r,s \leq n}$. Bekanntlich gilt $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ für alle i, j, k, l. Vermöge des Ringhomomorphismus $R \to M_n(R), r \mapsto rE$, wird $S = M_n(R)$ wie üblich als R-Links- und R-Rechtsmodul betrachtet. Definiere

$$P = \sum_{i=1}^{n} RE_{1i} \text{ (Zeilenraum) und } Q = \sum_{i=1}^{n} E_{i1}R \text{ (Spaltenraum).}$$

Dann gilt $P \in {}_R\mathcal{M}_S, Q \in {}_S\mathcal{M}_R$, und

$$P \otimes_S Q \cong R \text{ in } {}_R\mathcal{M}_R,\ Q \otimes_R P \cong S \text{ in } {}_S\mathcal{M}_S.$$

3. Sei C eine endlichdimensionale Coalgebra. Zeige: Der natürliche Isomorphismus $C^{**} \cong C$ induziert eine Bijektion

$$\mathrm{Alg}(C^*, k) \cong G(C) := \{g \in C \mid \Delta(g) = g \otimes g, \varepsilon(g) = 1\}.$$

(Alg bezeichnet die Menge der Algebrahomomorphismen).

4. Seien A eine Algebra und $(C, (C_n)_{n \geq 0})$ eine *filtrierte Coalgebra*, d.h. C ist eine Coalgebra und $C_n, n \geq 0$, sind Untervektorräume mit

(a) $C_n \subset C_{n+1}$ für alle $n \geq 0$,
(b) $C = \bigcup_{n \geq 0} C_n$,
(c) $\Delta(C_n) \subset \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}$ für alle $n \geq 0$.

Sei $f : C \to A$ eine lineare Abbildung, deren Restriktion $f|C_0 : C_0 \to A$ $*$-invertierbar sei. Zeige, dass f $*$-invertierbar ist.

Hinweis: Wähle eine lineare Abbildung $g : C \to A$, deren Restriktion $g|C_0$ $*$-invers zu f. Sei $\varphi = \eta\varepsilon - f * g$. Dann ist $\varphi^i(C_n) = 0$ für alle $i > n$, wobei φ^i die i-te Potenz bezüglich der Convolution ist, und $\phi = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i : C \to A$ ist $*$-invers zu $f * g$.