Prof. H.-J. Schneider
Mathematisches Institut
Universität München WS 08/09

Hopfalgebren und Quantengruppen

Blatt 2, 24. Oktober

1. Aufgabe 3 von Blatt 1.

2. Seien R ein Ring und $X \in {}_R\mathcal{M}$. Zeige:

$$\mathrm{Hom}_R(X,-) : {}_R\mathcal{M} \to {}_\mathbb{Z}\mathcal{M} \text{ und } \mathrm{Hom}_R(-,X) : {}_R\mathcal{M} \to {}_\mathbb{Z}\mathcal{M}$$

sind linksexakt. Sind diese Funktoren stets exakt?

3. Seien X, Y Vektorräume, $U \subset X, V \subset Y$ Untervektorräume und $p_X : X \to X/U$, $p_Y : Y \to Y/V$ die kanonischen Abbildungen. Zeige:

$$\mathrm{Ke}(X \otimes Y \xrightarrow{p_X \otimes p_Y} X/U \otimes Y/V) = X \otimes V + U \otimes Y.$$

4. Sei k ein Körper (und $\otimes_k = \otimes$).
   (a) Seien V, W endlichdimensionale k-Vektorräume. Zeige:
   $$\mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W) \cong \mathrm{End}(V \otimes W)$$
   als k-Algebren.
   (b) Seien m, n natürliche Zahlen ≥ 1 und k eine Körper. Berechne $M_n(k) \otimes M_m(k)$ als k-Algebra.
   (c) Seien G, H Monoide. Zeige: $k[G \times H] \cong k[G] \otimes k[H]$ als k-Algebren.
   (d) Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeige: Es gibt $n \geq 1$ und $m_1, \ldots, m_n \geq 1$, so dass
   $$k[G] \cong k[X_1, \ldots, X_n]/(X_1^{m_1} - 1, \ldots, X_n^{m_n} - 1)$$
   als k-Algebren, wobei $k[X_1, \ldots, X_n]$ die kommutative Polynomalgebra in n Unbestimmten ist.
   (e) Sei A eine k-Algebra und $k \subset L$ eine Körpererweiterung. Zeige: Der Ring $A \otimes L$ ist L-Algebra mit der induzierten L-Rechtsmodulstruktur, und es gilt $[A : k] = [A \otimes L : L]$.
   (f) Sei $k \subset L$ eine endliche Galoiserweiterung. Berechne die L-Algebra $L \otimes L$.