Prof. H.-J. Schneider
Mathematisches Institut
Universität München

WS 08/09

Hopfalgebren und Quantengruppen

Blatt 12, 23. Januar

1. Sei C eine endlichdimensionale Coalgebra. Für Teilmengen $X \subset C^*$ und $Y \subset C$ seien

$$X^\perp = \{c \in C \mid f(c) = 0 \ \forall f \in X\}$$
$$Y^\perp = \{f \in C^* \mid f(c) = 0 \ \forall c \in Y\}.$$

Zeige: Die Abbildungen $^\perp$ definieren Bijektionen zwischen

(a) der Menge der Untercoalgebren von C und der Menge der Ideale von C^*,

(b) der Menge der einfachen Untercoalgebren von C und der Menge der maximalen Ideale von C^*.

2. Sei C eine endlichdimensionale Coalgebra mit Coradikal C_0 und $\mathrm{Ra}(C^*)$ das Jacobson-Radikal von C^*. Dann gilt $\mathrm{Ra}(C^*) = C_0^\perp$.

3. Seien $\mathcal{M}$ die Kategorie der Mengen und $\mathcal{E}_k$ die Kategorie der endlichdimensionalen Coalgebren mit Coalgebrahomomorphismen als Morphismen. Für jede Coalgebra C sei

$$\mathrm{Cosp}(C) : \mathcal{C}_k \to \mathcal{M}, \ E \mapsto \mathrm{Coalg}(E, C),$$

die Einschränkung des Hom-Funktors. Zeige: Für alle Coalgebren C, D ist die Abbildung

$$\mathrm{Coalg}(C, D) \to \mathrm{Nat}(\mathrm{Cosp}(C), \mathrm{Cosp}(D))$$

gegeben durch

$$f \mapsto (\varphi_E = \mathrm{Coalg}(\mathrm{id}, f) : \mathrm{Coalg}(E, C) \to \mathrm{Coalg}(E, D))_{E \in \mathcal{E}_k}$$

bijektiv.

4. Sei H eine Bialgebra mit Untervektorräumen $X_0 \subset X_1$. Es gelte:

(a) X_0 is Unteralgebra von H,

(b) X_1 erzeugt H als Algebra,

(c) $X_0 X_1 \subset X_1, X_1 X_0 \subset X_1$,

(d) $\Delta(X_0) \subset X_0 \otimes X_0, \ \Delta(X_1) \subset X_1 \otimes X_0 + X_0 \otimes X_1$.

Zeige: Das Coradikal von H ist in X_0 enthalten.
Hinweis: Betrachte die Filtrierung $(X_n)_{n \geq 0}$ von H mit $X_n = (X_1)^n$ für all $n \geq 1$.