Prof. H.-J. Schneider
Mathematisches Institut
Universität München

WS 08/09

Hopfalgebren und Quantengruppen

Blatt 11, 16. Januar

Seien I eine Menge, $\mathfrak{g}_I$ eine Liealgebra und $x_i \in \mathfrak{g}, i \in I$, Elemente von $\mathfrak{g}$ mit $x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$ in I. Dann heißt $(\mathfrak{g}_I, (x_i)_{i\in I})$ oder kurz $\mathfrak{g}_I$ freie von I erzeugte Liealgebra, falls für jede Liealgebra $\mathfrak{g}$ und jede Familie von Elementen $y_i \in \mathfrak{g}, i \in I$, genau ein Liealgebrahomomorphismus $f : \mathfrak{g}_I \to \mathfrak{g}$, so dass $f(x_i) = y_i$ für alle $i \in I$ gilt, existiert.

1. Seien I eine Menge und $k < x_i \mid i \in I >$ die freie Algebra in den Unbestimmten $x_i, i \in I, x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$. Sei $\mathfrak{g}_I$ die von allen $x_i, i \in I$, erzeugte Unterliealgebra von $k < x_i \mid i \in I >^-$. Zeige: $(\mathfrak{g}_I, (x_i)_{i\in I})$ ist freie von I erzeugte Liealgebra mit $U(\mathfrak{g}_I) \cong k < x_i \mid i \in I >$.

2. Seien V ein Vektorraum und $T(V)$ die Tensoralgebra.
   (a) Zeige: $T(V)$ ist Hopfalgebra, wobei alle Elemente aus V primitiv sind.
   (b) $T(V) \cong U(\mathfrak{g})$ als Hopfalgebra, wobei $\mathfrak{g}$ freie Liealgebra in einer Basis von V ist.

3. Seien V ein Vektorraum und $T(V)$ die Tensoralgebra mit der Hopfalgebrastruktur aus der vorigen Aufgabe und $\mathfrak{g}$ die von V erzeugte Unterliealgebra von $T(V)^-$. Sei $T_n(V) = V \otimes \cdots \otimes V$($n$-mal), $n \geq 0$. Sei $\Phi : T(V) \to T(V)$ die k-lineare Abbildung mit

$$\Phi(1) = 0,$$
$$\Phi(v) = v,$$
$$\Phi(v_1 v_2 \cdots v_n) = [v_1, [v_2, [\ldots, v_n] \ldots]] = \mathrm{ad}(v_1)(\Phi(x v_2 \cdots v_n))$$

for all $v, v_1, \ldots, v_n \in V, n \geq 2$.
   (a) Zeige: Für alle $n \geq 0$ und $x \in T_n(V)$ gilt $(\Phi * \mathrm{id})(x) = nx$.
   (b) Sei $\mathrm{Char}(k) = 0$. Dann sind für alle $n \geq 0$ und $x \in T_n(V)$ folgende Aussagen äquivalent:
      (i) $x \in \mathfrak{g}$.
      (ii) x ist primitiv.
      (iii) $\Phi(x) = nx$.