Prof. H.-J. Schneider
Mathematisches Institut
Universität München

WS 08/09

Hopfalgebren und Quantengruppen

Blatt 10, 9. Januar

1. Seien G eine Gruppe, $k[G]$ die Gruppenalgebra und A eine Algebra. Die Algebra A ist eine G-graduierte Algebra, falls für alle $g \in G$ Untervektorräume A_g existieren mit $A = \oplus_{g \in G} A_g, 1 \in A_1$ und $A_g A_h \subset A_{gh}$ für alle $g, h \in G$. Ist A G-graduierte Algebra, so heisst A stark graduiert (strongly graded), falls für alle $g, h \in G \quad A_g A_h = A_g h$ gilt.
   (a) Gib eine Bijektion an zwischen den $k[G]$-Comodulalgebra-Strukturen auf A and den Strukturen von A als G-graduierte Algebra. Ist hierbei A $k[G]$-Comodulalgebra vermöge $\delta : A \to A \otimes k[G]$, so ist die zugehörige G-Graduierung durch
   $$A_g = \{a \in A \mid \delta(a) = a \otimes g\}$$
   gegeben.
   (b) Sei A $k[G]$-Comodulalgebra mit $B = A^{\text{co}k[G]}$. Zeige, dass $B \subset A$ genau dann $k[G]$-Galoiserweiterung ist, wenn A stark G-graduiert ist bezüglich der zugehörigen G-Graduierung.

Hinweis zu (b): Sei A stark G-graduiert. Verwende eine Darstellung der 1 aus $A_g A_{g^{-1}} = B$, um zu zeigen, dass die Multiplikationsabbildung einen Isomorphismus $A_g \otimes A_h \to A_{gh}$ definiert.

2. Sei G eine Gruppe.
   (a) Sei $N \subset G$ eine Untergruppe. Dann ist $k[G]$ frei als $k[N]$-Linksmodul und als $k[N]$-Rechtsmodul.
   (b) Seien $N \subset G$ ein Normalteiler, $p : G \to G/N$ die Quotientenabbildung und $\pi = k[p] : k[G] \to k[G/N]$ die von p induzierte Hopfalgebraabbildung. Zeige: $\mathrm{Ke}(\pi) = k[G](k[N])^+$, und $k[N] = k[G]^{\text{co}k[G/N]}$. Hier bezeichnet $k[G]^{\text{co}k[G/N]}$ die rechts $k[G/N]$-coinvarianten Elemente bezüglich der Comodulalgebrastruktur $(\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta$.

3. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.
   (a) Sei $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ eine Unterliealgebra. Dann ist die von der Inklusion induzierte Abbildung $U(i) : U(\mathfrak{a}) \to U(\mathfrak{g})$ injektiv, und $U(\mathfrak{g})$ ist vermöge $U(i)$ freier $U(\mathfrak{a})$-Linksmodul und freier $U(\mathfrak{a})$-Rechtsmodul.
   (b) Sei $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal mit Quotentenabbildung $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ und sei $\pi = U(p) : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$. Zeige: $\mathrm{Ke}(\pi) = U(\mathfrak{g})U(\mathfrak{a})^+$. Was ist $U(\mathfrak{g})^{\text{co}U(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})}$ (bezüglich der Comodulalgebrastruktur $(\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta$)?