TOPOLOGIE UND ANALYSIS MEHRERER VARIABLEN (SS 09)

BERNHARD HANKE

1. Taylor-Reihen

Dieses Kapitel schließt direkt an den Abschnitt „gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen“ aus dem Wintersemester an. Dieser kann auch mit Hilfe von [F] (=Forster 1), Kapitel 21, nachgeholt werden.

Wir besprechen die Grundlagen der Taylorentwicklung und der damit verbundenen Konvergenzfragen. Als Beispiele betrachten wir die Exponentialfunktion, die trigonometrischen Funktionen, sowie die Logarithmus- und Arcustangensfunktion. Mit Hilfe des Abelschen Grenzwertsatzes leiten wir aus den letzten beiden Beispielen die genauen Werte der alternierenden harmonischen Reihe, sowie der Leibnizschen Reihe her. Siehe [F], S. 246-255.

Die Binomialreihe haben wir bereits im letzten Semester behandelt, aber etwas anders als in [F], S. 256 ff. Wir stellen unser Vorgehen kurz dar. Für $s \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\binom{s}{n} := \frac{s \cdot (s-1) \cdot \ldots \cdot (s-n+1)}{n!}$$

falls $n > 0$ und $\binom{s}{0} := 1$.

Satz 1.1. *Für $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ist der Konvergenzradius der* Binomialreihe

$$B(z,s) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n .$$

gleich 1. *Falls $z \in (-1,1)$, so konvergiert sie gegen $(1+z)^s$.*

Für $s \in \mathbb{N}$ bricht die Binomialreihe nach endlich vielen Summanden ab und der Konvergenzradius ist damit unendlich. Die Formel $B(z,s) = (1+z)^s$ ist dann einfach der binomische Lehrsatz.

Nach Satz 1.1 stimmt die Taylorentwicklung der Funktion $z \mapsto (1+z)^s$ um den Punkt 0 mit der Binomialreihe überein und konvergiert für $z \in (-1,1)$ gegen $(1+z)^s$. Das Konvergenzverhalten der Binomialreihe für $z \in \mathbb{R}$ mit $|z| = 1$ (also auf dem Rand des Konvergenzkreises) wird in [F], Zusatz zu Satz 7 in Abschnitt 22, geklärt. Wir gehen darauf hier nicht weiter ein.

Zum Beweis von Satz 1.1 zeigen wir zunächst

Lemma 1.2. *Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt die Formel*

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}.$$

Beweis. Beweis über Vollständige Induktion nach n. Der Fall $n=0$ ist klar.
Die Aussage für n lautet nun

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+\beta-n+1) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)\cdot\beta(\beta-1)\cdot\ldots\cdot(\beta-n+k+1)\,.$$

Daraus folgt

$$(\alpha+\beta)\cdot\ldots\cdot(\alpha+\beta-n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)\beta\cdot\ldots\cdot(\beta-n+k+1)((\alpha-k)+(\beta-n+k))\,.$$

Und das ist gleich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\alpha\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)\beta\cdot\ldots\cdot(\beta-n+k) \quad &+ \\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)\beta\cdot\ldots\cdot(\beta-n+k) \quad &= \\ \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\alpha\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)\beta\cdot\ldots\cdot(\beta-n+k) \quad &.\end{aligned}$$

Das ist die Behauptung für $n+1$. $\square$

Wir fahren nun mit dem Beweis von Satz 1.1 fort. Zunächst zeigen wir, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{n}z^n$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und jedes komplexe z mit $|z|<1$ konvergiert und zwar mit der folgenden zusätzlichen Eigenschaft: Sind $R>0$ sowie $z \in \mathbb{C}$ mit $|z|<1$ gegeben, so ist die Konvergenz bei festem z gleichmäßig in $s \in [-R,R]$.

Es sei also $z \in \mathbb{C}$ mit $|z|<1$ fest vorgegeben. Der Betrag des Quotienten zweier aufeinanderfolgender Summanden in der binomischen Reihe ist

$$|\frac{z\binom{s}{n+1}}{\binom{s}{k}}| = |z(1-\frac{s+1}{n+1})|$$

Der letzte Ausdruck ist für $|s| \leq R$ kleiner oder gleich $(1+\frac{R+1}{n+1})|z|$. Da $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{R+1}{n+1}) = 1$ und $|z|<1$, existiert ein Θ mit $0 \leq \Theta < 1$ (z.B. $\Theta := 1-\frac{|z|}{2}$) und ein n_0, so dass $(1+\frac{R+1}{n+1})|z| \leq \Theta$ für alle $n \geq n_0$. Wir erhalten dann also für alle $n \geq 0$ ganz ähnlich wie beim Beweis des Quotientenkriteriums die Abschätzung

$$\left|\sum_{k=n_0+n}^{\infty}\binom{s}{k}z^k\right| \leq \left|\binom{s}{n_0}z^{n_0}\right|\sum_{k=n}^{\infty}\Theta^k$$

und dieser Ausdruck ist für $|s| \leq R$ durch $C \cdot \frac{\Theta^n}{1-\Theta}$ nach oben beschränkt, wobei C das Maximum der stetigen Funktion $s \mapsto |\binom{s}{n_0} z^{n_0}|$ auf dem kompakten Intervall $[-R, R]$ bezeichnet. Für $\epsilon > 0$ existiert ein $N > 0$, so dass $\left| C \cdot \frac{\Theta^n}{1-\Theta} \right| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Daraus folgt die behauptete gleichmäßige Konvergenz in $s \in [-R, R]$.

Mit einer ganz ähnlichen Rechnung und der Eulerschen Formel für den Konvergenzradius (siehe Skript aus WS 08/09) sieht man nun auch, dass für $s \notin \mathbb{N}$ der Konvergenzradius der Binomialreihe gleich 1 ist.

Nach dem eben Gezeigten ist die Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad s \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n$$

stetig (denn auf jedem abgeschlossenen Intervall $[-R, R]$ ist die Konvergenz gleichmäßig in s). Weiterhin gilt für alle $s, t \in \mathbb{R}$ die Funktionalgleichung

$$B(z, s) \cdot B(z, t) = B(z, s + t)\,.$$

Dies beweist man mit dem Cauchy-Produkt von Reihen mit Hilfe der Formel aus Lemma 1.2. Nach der Charakterisierung der Potenzfunktion nach [F], Abschnitt 12, Satz 6, folgt

$$B(z, s) = a^s$$

wobei $a = B(z, 1) = 1+z$ ist. Also haben wir wie gewünscht $B(z, s) = (1+z)^s$ gezeigt.

2. Fourier-Reihen

Hier versucht man 2π-periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als (möglicherweise unendliche) Linearkombination von *trigonometrischen Polynomen* zu schreiben. Dies lässt sich zum Beispiel physikalisch dadurch motivieren, dass man ein periodischen Signal als Linearkombination einfacher Sinus- und Kosinusschwingungen schreiben möchte. Vom mathematischen Standpunkt aus bietet die Fourieranalysis einen ersten Einblick in die Theorie der Hilberträume, die in der modernen Analysis eine fundamentale Rolle spielt und in der Funktionalanalysis weiter vertieft wird.

Wir richten uns im wesentlichen nach [F], Paragraph 23.

Da man in der Fouriertheorie oft mit Integralen komplexwertiger Funktionen umgehen muss, hier dazu einige Bemerkungen.

Definition. Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $\phi : [a, b] \to \mathbb{C}$. Wir nennen ϕ *integrierbar*, wenn sowohl der Realteil $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ als auch der Imaginärteil $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar sind. Dann setzen wir

$$\int_a^b \phi(x)dx := \int_a^b u(x)dx + i \cdot \int_a^b v(x)dx\,.$$

Man zeigt leicht (durch getrennte Betrachtung von Real- und Imaginärteil), dass das Integral eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung vom $\mathbb{C}$-Vektorraum der integrierbaren Funktionen $[a,b] \to \mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ definiert. Auch kann man Übergang zur konjugiert komplexen Funktion und Integrieren vertauschen. Schwieriger ist folgende Rechenregel zu zeigen (die für reelle Funktionen bereits bewiesen wurde, siehe [F], Paragraph 18, Satz 7).

Proposition 2.1. *Es sei $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist auch $|\phi|$ integrierbar und es gilt*

$$|\int_a^b \phi(x)dx| \leq \int_a^b |\phi(x)|dx\,.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ den Real- und Imaginärteil von ϕ, d.h. $\phi = u + i \cdot v$. Nach Voraussetzung sind dann u und v integrierbar, und somit auch $|u|$ und $|v|$. Für gegebenes $\epsilon > 0$ gibt es also (reellwertige) Treppenfunktionen $0 \leq \phi_1 \leq |u| \leq \psi_1$ und $0 \leq \phi_2 \leq |v| \leq \psi_2$, so dass

$$\int_a^b (\psi_1(x) - \phi_1(x)) < \epsilon\,, \quad \int_a^b (\psi_2(x) - \phi_2(x))dx < \epsilon\,.$$

Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sei $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ die Euklidische Norm von (x,y). Die gleiche Schreibweise verwenden wir, falls x, y Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ sind. Die Euklidische Norm ist dann punktweise zu bilden. Die Funktionen $\|(\phi_1, \phi_2)\|$ und $\|(\psi_1, \psi_2)\|$ sind dann ebenfalls Treppenfunktionen und es gilt

$$0 \leq \|(\phi_1, \phi_2)\| \leq |\phi| \leq \|(\psi_1, \psi_2)\|\,.$$

Weiterhin ist nach zweimaliger Anwendung der Dreiecksungleichung

$$\|(\psi_1, \psi_2)\| - \|(\phi_1, \phi_2)\| \leq \|(\psi_1 - \phi_1, \psi_2 - \phi_2)\| \leq |\psi_1 - \phi_1| + |\psi_2 - \phi_2|$$

und wir folgern

$$\int_a^b (\|(\psi_1(x), \psi_2(x))\| - \|(\phi_1(x), \phi_2(x))\|)dx < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon\,.$$

Daraus folgt die Integrierbarkeit von $|\phi|$.

Wir zeigen nun die Ungleichung $|\int \phi| \leq \int |\phi|$, wobei wir zur Vereinfachung die Integrationsgrenzen und das Argument weglassen. Falls $\int \phi = 0$, so ist diese Ungleichung klar. Wir nehmen also an, dass $\int \phi \neq 0$. Es sei

$$I := \overline{\int \phi} \in \mathbb{C}$$

Dann ist das Integral $\int (I \cdot \phi)$ reell, denn es stimmt mit seinem Konjugierten überein. Insbesondere gilt

$$\int (I \cdot \phi) = \int \mathrm{Re}(I \cdot \phi)\,,$$

denn das Integral über den Imaginärteil muss ja verschwinden. Wir erhalten somit

$$|I|\cdot|\int\phi| = |\int(I\cdot\phi)| = |\int \mathrm{Re}(I\cdot\phi)| \leq \int |\,\mathrm{Re}(I\cdot\phi)| \leq \int |I\cdot\phi| = |I|\cdot\int|\phi|\,.$$

Dabei haben wir im ersten Schritt die $\mathbb{C}$-Linearität des Integrals benutzt, im zweiten Schritt die Bemerkung von vorhin, im dritten Schritt die entsprechende Rechenregel für reellwertige Funktionen, im vierten Schritt die Ungleichung $|\,\mathrm{Re}(x)| \leq |x|$, die für jede komplexe Zahl x gilt, sowie die Integrierbarkeit von $|I\cdot\phi|$ (die vorhin bewiesen wurde) und im letzten Schritt die $\mathbb{R}$-Linearität des Integrals. Division durch $|I|$ zeigt nun die Behauptung. □

Ist $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrierbar und $p \geq 1$ eine reelle Zahl, so definieren wir wie im Reellen die *L^p-Norm*

$$\|\phi\|_p := (\int_a^b |\phi(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}\,.$$

Hier benötigen wir natürlich die Integrierbarkeit von $|\phi|$, die wir gerade gezeigt haben. Es gelten die

- Höldersche Ungleichung: Für integrierbare Funktionen $\phi,\psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $p,q > 1$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ ist $\int_a^b |\phi(x)|\cdot|\psi(x)|dx \leq \|\phi\|_p \cdot \|\psi\|_q$ und die
- Minkowskische Ungleichung: Für integrierbare Funktionen $\phi,\psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $p \geq 1$ gilt die Dreiecksungleichung $\|\phi+\psi\|_p \leq \|\phi\|_p + \|\psi\|_p$.

Die Höldersche Ungleichung folgt direkt aus dem schon bewiesenen reellen Fall. Für die Minkowskische Ungleichung beobachtet man

$$\|\phi+\psi\|_p = \|\,|\phi+\psi|\,\|_p \leq \|\,|\phi|+|\psi|\,\|_p$$

und wendet die schon bewiesene Minkowskische Ungleichung auf die reellen (und integrierbaren) Funktionen $|\phi|$ und $|\psi|$ an. Wir definieren noch für komplexwertige integrierbare Funktionen $f,g : [a,b] \to \mathbb{C}$ das *L^2-Skalarprodukt*

$$\langle f,g\rangle_{L^2} := \int_a^b f(x)\cdot\overline{g(x)}dx$$

Dies hat alle Eigenschaften eines Hermiteschen Produktes auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum V der integrierbaren Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$, ist aber nicht positiv definit, sondern nur *positiv semidefinit*, d.h. $\langle f,f,\rangle \geq 0$ (d.h. dieser Ausdruck ist insbesondere reell) für alle $f \in V$. Jedoch kann aus dem Verschwinden $\langle f,f\rangle = 0$ im allgemeinen nur dann $f = 0$ gefolgert werden, falls f zusätzlich stetig ist. Das L^2-Skalarprodukt und die L^2-Norm stehen in der Beziehung

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle}\,,$$

die L^p-Normen für $p \neq 2$ lassen sich jedoch nicht auf diese Weise mit Hilfe eines Skalarproduktes ausdrücken.

Wir nennen eine komplexwertige Funktion $\phi : U \to \mathbb{C}$ (wobei $U \subset \mathbb{R}$) *differenzierbar* (in $x_0 \in U$), falls dies für den Realteil u und den Imaginärteil v von ϕ gilt. Wir schreiben dann $\phi'(x) := u'(x) + i \cdot v'(x)$. Entsprechend definiert man stetig differenzierbare komplexwertige Funktionen, etc. Durch getrennte Betrachtung von Real- und Imaginärteil beweist man leicht die folgende Version des Fundamentalsatzes der Integral- und Differentialrechnung: Für alle stetig differenzierbaren Funktionen $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int_a^b \phi'(x)dx = \phi(b) - \phi(a)\,.$$

Zum Beispiel zeigt man durch eine direkte Rechnung mit Hilfe der Eulerschen Formel und den Differentiationsregeln für die Trigonometrischen Funktionen $\frac{d}{dx}(\exp(ikx)) = ik\exp(ikx)$ und für alle $k \in \mathbb{Z}$. Daher ist für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\int_a^b e^{ikx}dx = \frac{1}{ik}(e^{ika} - e^{ikb})\,.$$

Die Substitutionsregel und die Regel für partielle Integration gelten für komplexwertige Funktionen wie im Reellen. Dies überprüft man wieder leicht durch getrennte Betrachtung von Real- und Imaginärteil.

3. Metrische, normierte und topologische Räume

Definition. Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X,d) bestehend aus einer Menge X und einer Abbildung, genannt *Metrik*,

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften: Für alle $x, y, z \in X$ gilt

- $d(x,y) = d(y,x)$,
- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Es folgt aus diesen Axiomen, dass $d(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$.

Wichtige Beispiele sind der euklidische Raum $(\mathbb{R}^n, d)$ mit der euklidischen Metrik $d(x,y) := \|x - y\|$. Jede Menge wird mit der *diskreten Metrik* d_{diskr} zu einem metrischen Raum, wobei

$$d_{diskr}(x,y) := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x \neq y\,, \\ 1\,, & \text{falls } x = y\,. \end{cases}$$

Ist (X,d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $r > 0$, so bezeichnet $B_r(x_0) := \{x \in X \mid d(x,x_0) < r\}$ den *offenen Ball* um x_0 mit Radius r. Wir übertragen nun die ϵ-δ-Definition der Stetigkeit auf metrische Räume.

Definition. Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *stetig* im Punkt $x \in X$, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x)) .$$

Dabei sind die Bälle bezüglich der Metriken d_X und d_Y gemeint. Wir nennen f *stetig*, falls f stetig in jedem Punkt aus X ist.

Ist zum Beispiel X ein metrischer Raum mit der diskreten Metrik und (Y, d) ein beliebiger metrischer Raum, so ist jede Abbildung $X \to Y$ stetig.

Wir geben einige weitere Beispiele für metrische Räume. Es sei X eine Menge und $C(X)$ die Menge der beschränkten Abbildungen $X \to \mathbb{R}$. Diese wird zu einem metrischen Raum, wenn wir

$$d(f, g) := \max_{t \in X} |f(t) - g(t)|$$

setzen. Ist $(G, \circ, e)$ eine Gruppe, so betrachten wir auf G sogenannte *Wortmetriken*. Dazu dazu $S \subset G$ ein *symmetrisches Erzeugendensystem*, d.h. jedes Elements aus G kann durch Elemente in S ausgedrückt werden und falls $s \in S$ so gilt auch $s^{-1} \in S$. Ist $g \in G$, so definieren wir die *Wortlänge* von G bezüglich S durch

$$l_S(g) := \begin{cases} 0\,, \text{ falls } g = e\,, \\ \min\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \exists s_1, \ldots, s_n \in S \text{ mit } g = s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_n\} \end{cases}$$

Es ist nun nicht schwer zu sehen, dass man durch die Setzung $d_S(g, h) := l_S(g^{-1} \circ h)$ auf G eine Metrik erhält. Diese hängt in der Regel von S ab. Wenn man zum Beispiel $S = G$ wählt, so erhält man auf G die diskrete Metrik. Die Untersuchung von Gruppen als metrische Räume ist Gegenstand der geometrischen Gruppentheorie.

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so trägt jede Teilmenge $A \subset X$ eine (durch Einschränkung von d gegebene) *induzierte* Metrik.

Definition. Eine Teilmenge $U \subset X$ eines metrischen Raumes heißt *offen*, falls für alle $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit

$$B_\epsilon(x) \subset U .$$

Lemma 3.1. *Ist (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$, so ist $B_\varepsilon(x) \subset X$ eine offene Teilmenge.*

Beweis. Es sei $y \in B_\varepsilon(x)$. Dann gilt $0 \leq d(x, y) < \varepsilon$. Sei $\lambda := \varepsilon - d(x, y)$. Ist nun $z \in B_\lambda(y)$, so ist $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \lambda + d(x, y) = \epsilon$. Aus diesen Überlegungen folgt, dass $B_\lambda(y) \subset B_\varepsilon(x)$. Somit ist $B_\varepsilon(x)$ eine offene Teilmenge von X. $\square$

Proposition 3.2. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig, falls für alle offenen Teilmengen $V \subset Y$ das Urbild*

$$f^{-1}(V) \subset X$$

offen ist.

Beweis. Es sei f stetig und $V \subset Y$ offen. Wir wollen zeigen, dass $f^{-1}(V) \subset X$ offen ist. Sei also $x \in f^{-1}(V)$. Da V in Y offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(f(x)) \subset V$. Nach Definition 3 gibt es somit ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$ - insbesondere ist also $B_\delta(x) \subset f^{-1}(V)$. Nach Definition 3 ist somit $f^{-1}(V) \subset X$ offen.

Sei nun umgekehrt das Urbild jeder in Y offenen Teilmenge unter f offen in X. Seien $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Nach Lemma 3.1 ist $B_\epsilon(f(x)) \subset Y$ offen. Nach Voraussetzung ist also $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)) \subset X$ offen. Da offensichtlich $x \in f^{-1}(B_\epsilon(f(x))$, existiert also nach Definition 3 ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x))$. Das bedeutet genau, dass $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$ und dies zeigt die Stetigkeit von f (siehe Definition 3).

□

Proposition 3.3. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind $\emptyset$ und X offene Teilmengen von X. Sind weiterhin U und V offene Teilmengen von X, so auch $U \cap Y$. Und ist I eine Indexmenge und ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von offenen Teilmengen von X, so ist auch die Vereinigung $\cup_{i \in I} U_i$ offen in X.*

Zum Beweis siehe Forster 2, Satz 3 in Abschnitt 1.

Diese Tatsachen veranlassen uns, den Begriff der Stetigkeit abstrakter zu fassen und alleine auf den Begriff der offenen Teilmengen abzustellen.

Definition. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge X und einer Menge $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X (genannt *Topologie*) mit den folgenden Eigenschaften.

- $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$,
- $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$,
- $\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \in \mathcal{T}$.

Die Elemente von $\mathcal{T}$ werden *offene Teilmengen* von X genannt. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls $X \setminus A$ offen ist.

Aus dem zweiten obigen Axiom folgt, dass in einem topologischen Raum der Schnitt endlich vieler offener Teilmengen wieder offen ist. In jedem topologischen Raum X sind also $\emptyset$ und X sowohl offene als auch abgeschlossene Teilmengen von X.

Es sei nun X ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von x, falls es eine offene Menge $V \subset X$ gibt, so dass $x \in V$ und $V \subset U$. Falls X sogar ein metrischer Raum ist, bedeutet dies genau, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(x, \varepsilon) \subset U$. Umgebungen brauchen selbst nicht unbedingt offene Teilmengen zu sein.

In einem topologischen Raum ist eine Teilmenge also genau dann offen, wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist.

Wir haben in Proposition 3.3 gezeigt:

Proposition 3.4. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann bildet die Menge der (bezüglich d) offenen Teilmengen von X eine Topologie auf X.*

Wie nennen diese Topologie die von d auf X *induzierte* Topologie. Es können durchaus verschiedene Metriken die gleiche Topologie induzieren.

Durch unsere Ergebnisse auf metrischen Räumen (siehe Proposition 3.2 motiviert sagen wir:

Definition. Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Wir nennen einen Abbildung $f : X \to Y$ *stetig*, falls für alle offenen Teilmengen $V \in \mathcal{T}_Y$ auch das Urbild $f^{-1}(V) \subset X$ offen ist (d.h. $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$). Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *Homöomorphismus*, falls f bijektiv und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind. Ist $x \in X$, so nennen wir f *stetig in* x, falls es für jede Umgebung $V \subset Y$ von $f(x)$ eine Umgebung $U \subset X$ von x gibt, so dass $f(U) \subset V$.

Falls die Topologien auf X und Y von Metriken induziert sind, erhalten wir genau die alte Definition von Stetigkeit. Man überlegt sich leicht, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen genau dann stetig ist, wenn die Urbilder abgeschlossener Mengen in Y immer abgeschlossen in X sind.

Es ist leicht, Beispiele für stetige, bijektive Abbildungen anzugeben, die keine Homöomorphismen sind. Die Homömorphismen spielen in der Topologie die gleiche Rolle wie die linearen Isomorphismen in der linearen Algebra, die biholomorphen Abbildungen in der Funktionentheorie, die Gruppenisomorphismen in der Gruppentheorie, die Isometrien in der Riemannschen Geomtrie, etc. Eines der Grundprobleme der Topologie lässt sich wie folgt formulieren: Es seien topologische Räume X und Y gegeben. Man entscheide, ob X und Y homöomorph sind oder nicht.

Insbesondere die algebraische Topologie entwickelt effektive Methoden, diese Frage zu entscheiden. Ein prominentes Resultat in diese Richtung lautet:

Satz 3.5. *Für $n \neq m$ sind die topologischen Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ (mit der von den von Standardmetriken induzierten Topologien) nicht homöomorph.*

Man kann auf einer gegebenen Menge X zahlreiche Topologien angeben - die meisten davon sind eher künstlich und unnütz. Zwei extreme Spezialfälle sind die der *diskreten Topologie*, bei der jede Teilmenge von X als offen erklärt wird und die *Klumpentopologie* mit $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

Umgekehrt kann man fragen, ob auf einem gegebenen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ eine Metrik existiert, so dass die induzierte Topologie mit $\mathcal{T}$ übereinstimmt. In diesem Falle heißt die Topologie $\mathcal{T}$ *metrisierbar*. Die diskrete Topologie ist immer metrisierbar (durch die diskrete Metrik).

Definition. Ein topologischer Raum X heißt *Hausdorffsch*, falls für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ eine Umgebung U_x von x und eine Umgebung U_y von y existiert mit $U_x \cap U_y = \emptyset$. In diesem Fall heißt X auch *Hausdorffraum.*

Falls X mehr als einen Punkt enthält, so ist die Klumpentopologie nicht Hausdorffsch. Damit ist diese auch nicht metrisierbar, denn es gilt

Proposition 3.6. *Ist X ein Hausdorffraum und $x \in X$, so ist die einpunktige Teilmenge $\{x\} \subset X$ abgeschlossen.*

Beweis. Ist $y \neq x$, so existieren offene Teilmengen $U_x, U_y \subset X$ mit $x \in U_x$, $y \in U_y$ und $U_x \cap U_y = \emptyset$ (man mache sich hier die Definition von „Umgebung“ klar). Insbesondere ist auch $x \notin U_y$. Damit ist $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y$ und diese Menge ist als Vereinigung offener Teilmengen offen. □

Proposition 3.7. *Jeder metrisierbare topologische Raum ist Hausdorffsch.*

Beweis. Sind $x, y \in X$ zwei verschiedene Punkte, so setze $d := d(x, y)$. Die offenen Kugeln um x und y mit Radius $d/2$ sind nach der Dreiecksungleichung disjunkt. □

Definition. Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Die Menge der Schnitte $U \cap A \subset A$, wobei $U \subset X$ offen ist, bildet eine Topologie auf A, die *Unterraumtopologie*, oder von $\mathcal{T}$ *induzierte* Topologie.

Eine Teilmenge $V \subset A$ ist also genau dann offen (abgeschlossen) bezüglich der Unterraumtopologie, falls es eine offene (abgeschlossene) Menge $U \subset X$ gibt mit $U \cap A = V$. Falls X ein metrischer Raum ist und $A \subset X$, so stimmt die Unterraumtopologie auf A mit der Topologie überein, die von A als metrischem Raum (mit der Metrik von X) induziert ist.

Ist X ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge und $f : X \to Y$ stetig, so ist die Einschränkung $f|_A : A \to Y$ ebenfalls stetig. Die Komposition stetiger Abbildungen ist stetig.

Der Begriff des topologischen Raumes ist gerade deshalb so nützlich, weil er in ganz verschiedenen mathematischen Kontexten auftritt und daher Sätze, die wir für topologische Räume beweisen, in der Regel eine breite Anwendung finden. Ganz allgemein bietete eine Topologie die Möglichkeit, den Begriff von „Nähe“ und damit auch z.B. von Konvergenz axiomatisch zu fassen.

Es sei nun X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Wir definieren das *Innere*

$$\mathrm{int}(A) \subset A$$

als die Vereinigung aller in A enhaltenen offenen Mengen (da $\emptyset$ immer offen ist, gibt es mindestens eine solche Teilmenge). Nach Definition ist $\mathrm{int}(A) \subset A$ offen und jede andere (in X) offene Teilmenge, die in A enthalten ist, ist auch in $\operatorname{int}(A)$ enthalten. Damit ist $\operatorname{int}(A)$ die größte in A enthaltene in X offene Teilmenge. Entsprechende definieren wir den *Abschluss*

$$\overline{A} \supset A$$

als den Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von X, die A enthalten. Man beachte dabei, dass der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen eines topologischen Raumen wieder abgeschlossen ist. $\overline{A}$ ist nach Konstruktion die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X die A enthält.

Weiterhin setzen wir

$$\partial A := \overline{A} \setminus \operatorname{int}(A)\,.$$

Dies ist der *Rand* von A. Da $\overline{A}$ abgeschlossen und $\operatorname{int}(A)$ offene Teilmenge von X sind, ist ∂A eine abgeschlossene Teilmenge von X. Die folgende Proposition erleichtert den Umgang mit diesen Mengen.

Proposition 3.8. *Es sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge und $x \in X$.*

- *x liegt genau dann in* $\operatorname{int}(A)$*, falls es eine Umgebung von x gibt, die in A enthalten ist.*
- *x liegt genau dann in $\overline{A}$, falls jede Umgebung von x die Menge A schneidet.*
- *x liegt genau dann in ∂A, wenn jede Umgebung von x sowohl Punkte aus A also auch aus $X \setminus A$ enthält.*

Beweis. Ist $x \in \operatorname{int}(A)$, so gibt es nach Definition eine offene Menge $U \subset X$, so dass $x \in U \subset A$. Damit ist U eine Umgebung von x, die in A enthalten ist. Sei umgekehrt U eine Umgebung von x, die in A enthalten ist. Nach Definition gibt es dann eine offene Menge $V \subset X$ mit $x \in V \subset U \subset A$. Nach Definition gilt $x \in \operatorname{int}(A)$.

Es sei nun $x \in \overline{A}$. Angenommen, es gibt eine Umgebung U von x mit $U \cap A = \emptyset$. Dann gibt es auch eine offene Umgebung V von x mit $V \cap A = \emptyset$. Das Komplement von V ist dann eine abgeschlossene Teilmenge von X, die A enthält, aber nicht x. Dies widerspricht aber $x \in \overline{A}$. Sei umgekehrt $x \notin \overline{A}$. Dann gibt es eine abgeschlossene Teilmenge $Z \subset X$ mit $A \subset Z$, aber $x \notin Z$. Somit ist $X \setminus Z$ eine (sogar offene) Umgebung von x, die A nicht schneidet.

Sei nun $x \in \partial A$. Dann gilt $x \in \overline{A}$ und somit enthält jede Umgebung von x Punkte aus A. Da aber auch $x \notin \operatorname{int}(A)$, kann es keine Umgebung von x geben, die ganz in A enthalten ist. Somit enthält auch jede Umgebung von A Punkte aus $X \setminus A$. Die andere Richtung ist ähnlich einfach zu zeigen. □

Mit Hilfe dieser Charaktersierung zeigt man zum Beispiel

$$\overline{A} = X \setminus (\operatorname{int}(X \setminus A))\,.$$

Weiterhin haben wir

Proposition 3.9. *Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist* $\operatorname{int}(A) = A \setminus \partial A$.

Wir nennen eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X *dicht* in X, falls $\overline{A} = X$. Beispielsweise ist die Teilmenge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dicht (bezüglich der üblichen Topologie auf $\mathbb{R}$).

Beispiel. Wir betrachten $X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$. Dann haben wir $\operatorname{int}(X) = B_1(0)$ und $\partial(X) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

Wir können nun auch den Begriff der konvergenten Folge in beliebigen topologischen Räumen definieren.

Definition. Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Wir sagen, eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus X *konvergiert* gegen x, falls es für jede Umgebung $U \subset X$ von x ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$. Wir schreiben dann $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Falls X sogar ein metrischer Raum mit Metrik d ist, bedeutet das: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein N, so dass $d(x_n, x) < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Und dies ist gleichbedeutend damit, dass $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Der Limes einer konvergenten Folge in einem topologischen Raum muss nicht unbedingt eindeutig sein: Ist X eine beliebige Menge versehen mit der Klumpentopologie, so konvergiert jede Folge in X gegen jeden Punkt aus X. In Hausdorffräumen haben wir aber Eindeutigkeit:

Proposition 3.10. *Es sei X ein Hausdorffraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Gilt $\lim x_n = x$ und $\lim x_n = y$, so gilt $x = y$.*

Der Beweis ist ganz analog zur ensprechenden Aussage über konvergente Folgen in $\mathbb{R}$.

Da metrische Räume immer die Hausdorffeigenschaft haben, sind damit in metrischen Räumen Limiten konvergenter Folgen eindeutig.

Proposition 3.11. *Es seien X und Y topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $x \in X$. Falls f stetig in x ist, so gilt: Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in X$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.*

Beweis. Es sei f stetig in x und (x_n) eine Folge in X mit $\lim x_n = x$. Es sei $U \subset Y$ eine Umgebung von $f(x)$. Da f stetig in x ist, gibt es eine Umgebung $V \subset X$ von x mit $f(V) \subset U$. Da $\lim x_n = x$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in V$ für alle $n \geq N$. Dann gilt $f(x_n) \in U$ für alle $n \geq N$. Somit gilt $\lim f(x_n) = f(x)$. □

Die Umkehrung dieser Aussage gilt leider nicht in allen topologischen Räumen, wie man an Beispielen zeigen kann. Falls X aber sogar ein metrischer Raum ist, so können wir die Umkehrung zeigen:

Proposition 3.12. *Es sei X ein metrischer Raum, Y ein topologischer Raum, $f : X \to Y$ eine Abbildung und für alle Folgen (x_n) in X mit $\lim x_n = x$ gelte $\lim f(x_n) = f(x)$. Dann ist f stetig in x.*

Beweis. Angenommen, f ist nicht stetig in x. Dann gibt es eine Umgebung $U \subset Y$ von $f(x)$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, ein Punkt x_n in $B_{1/n}(x)$ existiert, so dass $f(x_n) \notin U$. Dann konvergiert aber x_n gegen x, jedoch $f(x_n)$ nicht gegen $f(x)$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme $\square$

Für Abbildungen zwischen metrischen Räumen finden wir also die uns schon bekannte Äquivalenz von Stetigkeit und Folgenstetigkeit wieder. Betrachten wir Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$, so haben wir das folgende einfache Kriterium:

Proposition 3.13. *Es sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus $\mathbb{R}^n$. Es seien $x_{k1}, \ldots x_{kn}$ die Komponenten von x_k. Die Folge (x_k) konvergiert genau dann gegen einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, falls für alle $\nu = 1, \ldots, n$ die reellen Folgen $((x_{k\nu})_{k\in\mathbb{N}}$ im gewöhnlichen Sinne konvergieren und es gilt dann $\lim_{k\to\infty} x_{k\nu} = x_\nu$.*

Zum Beweis siehe Forster 2, Satz 1 in Abschnitt 2. Mit diesem Resultat und der Charakterisierung von Stetigkeit als Folgenstetigkeit (siehe Proposition 3.11) erhalten wir:

Proposition 3.14. *Es sei X ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. f ist genau dann stetig, wenn alle Komponenten $f_\nu : X \to \mathbb{R}$ für $\nu = 1, \ldots, n$ stetig sind.*

Damit beweist man leicht die Stetigkeit der Multiplikation und Addition $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sowie der Quotientenabbildung $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, vgl. Forster 2, S. 12 ff.

Wir können in metrischen Räumen zum Beispiel abgeschlossene Teilmengen durch das Verhalten konvergenter Folgen charakterisieren.

Proposition 3.15. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. A ist genau dann abgeschlossen, wenn folgendes gilt: Es sei (x_n) eine konvergente Folge in X mit $x_n \in A$ für alle n. Dann gilt auch $\lim x_n \in A$ (d.h. Limiten konvergenter Folgen in A liegen wieder in A).*

Zum Beweis siehe Forster 2, Satz 2 in Abschnitt 2. Für topologische Räume gilt im allgemeinen nur die Implikation, dass für abgeschlossene Teilmengen A die Limiten konvergenter Folgen in A wieder in A liegen.

Wir können in metrischen Räumen den (topologischen) Abschluss von Teilmengen wie folgt charakterisieren.

Proposition 3.16. *Es sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann besteht $\overline{A}$ genau aus den Limiten von in X konvergenten Folgen (x_n) mit $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Da $\overline{A}$ abgeschlossen ist und A enhält, folgt aus Proposition 3.15, dass die Limiten von konvergenten Folgen in A in $\overline{A}$ liegen. Sei nun $x \in \overline{A}$. Dann gibt es für jedes positive $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in A \cap B_{1/n}(x)$ (siehe Proposition 3.8). Die Folge (x_n) konvergiert dann nach Konstruktion gegen x. $\square$

Für topologische Räume X ist in der Regel der Abschluss $\overline{A}$ eine echte Obermenge der Limiten konvergenter Folgen in A. Ein Beispiel dazu wird in den Übungen konstruiert. Die volle Äquivalenz von Stetigkeit und Folgenstetigkeit, sowie die problematischen Teile der Aussagen in Proposition 3.15 und 3.16 gelten in allen topologischen Räumen, wenn man unseren Konvergenzbegriff durch den allgemeineren der *Netzkonvergenz* ersetzt. Wir gehen hier darauf nicht weiter ein.

Wir können in metrischen Räumen das Konzept der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen allgemein formulieren.

Definition. Es sei X eine Menge, (Y, d_Y) ein metrischer Raum sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Abbildungen $f_n : X \to Y$. Wir sagen (f_n) *konvergiert gleichmäßig* gegen $f : X \to Y$, falls es für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in X$.

Proposition 3.17. *Es sei X ein topologischer Raum, (Y, d) ein metrischer Raum und (f_n) eine Folge stetiger Abbildungen $X \to Y$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : X \to Y$ konvergiert. Dann ist auch f stetig.*

Beweis. Sei $x \in X$. Wir zeigen, dass f stetig in x ist. Da x beliebig gewählt war, folgt daraus die Stetigkeit von f. Wir wählen $\epsilon > 0$. Da (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es ein N, so dass $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ für alle $x \in X$ und alle $n \geq N$. Da f_N stetig ist, gibt es eine Umgebung U von x, so dass $d(f_N(x), f_N(y)) < \epsilon$ für alle $y \in U$. Dann gilt für alle $y \in U$

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(y)) + d(f_N(y), f(y)) < \epsilon + \epsilon + \epsilon$$

Da ϵ beliebig gewählt war, folgt daraus die Stetigkeit von f in x. □

Falls auch X ein metrischer Raum ist, findet sich ein Beweis von Proposition 3.17 auch in Forster 2, Satz 9 in Abschnitt 2. Der obige Beweis ist aber nur unwesentlich schwerer.

Es ist nicht möglich, gleichmäßige Konvergenz im Rahmen allgemeiner topologischer Räume zu definieren, denn die „Gleichmäßigkeit" drückt sich ja gerade dadurch aus, dass man für festes $\epsilon > 0$ eine Aussage für alle $x \in X$ hat und dies ist ohne Bezug auf eine Metrik in Y schwierig. (Im allgemeinen definiert man gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen für Funktionen, deren Bild in sogenannten *uniformen* Räumen liegt).

Für die Analysis besonders wichtige metrische Räume sind die *normierten Räume.*

Definition. Es sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung

$$\| - \| : V \to \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- $\|v\| = 0$ gilt genau dann, falls $v = 0$.

- $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ für alle $v \in V$ und alle α aus dem Grundkörper (d.h. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Ein Vektorraum zusammen mit einer Norm heißt *normierter Raum.*

Ist V ein normierter Raum, so erhält man durch die Setzung $d(v, w) := \|v - w\|$ eine Metrik auf V. Insofern sind normierte Räume spezielle metrische Räume und wir können auf normierten Räumen mit allen Konzepten arbeiten, die wir für metrische Räume und topologische Räume erarbeitet haben. Ist d eine beliebige Metrik auf V, so definiert $v \mapsto d(0, v)$ in der Regel keine Norm auf V (dies passiert zum Beispiel, wenn d die diskrete Metrik ist). Das heißt, der Begriff der Norm ist wirklich spezieller als der der Metrik.

Wichtige Beispiele für Normen sind:

- Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ haben wir für alle $p \geq 1$ die p-Norm $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$. Die Dreicksungleichung folgt dabei aus der Minkowskischen Ungleichung. Für $p = 2$ erhalten wir die euklidische Norm. Wir setzen noch $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$. Dies ist die *Maximumsnorm* auf $\mathbb{R}^n$. In diesem Fall folgt die Dreicksungleichung leicht mit einer direkten Rechnung.
- Ist $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $C^0(I)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Abbildungen $I \to \mathbb{R}$, so betrachten wir für $p \geq 1$ auf $C^0(I)$ die *p-Norm* $\|f\|_p := (\int_a^b |f(x)|^p)^{1/p}$. Wieder folgt aus der Minkowischen Ungleichung die Dreiecksungleichung. Wir setzen weiterhin $\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| \mid x \in I\}$ (dieses Maximum existiert, da f stetig ist). Dies ist die *Maximumsnorm.* Man zeigt wieder mit einer kurzen Rechnung (siehe Forster 2, S. 3 unten), dass es sich wirklich um eine Norm handelt).
- Ist X eine beliebige Menge und $B(X)$ die Menge der beschränkten Abbildungen $X \to \mathbb{R}$, so haben wir auf $B(X)$ die *Supremumsnorm* $\|f\|_X := \|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$, (siehe Forster 2, Beispiel 1.8).

Man sieht sofort, dass eine Funktionenfolge f_n in $(B(X), \| - \|_\infty)$ genau dann konvergiert, wenn die Folge gleichmäßig konvergiert. Konvergenz in $(C^0(I), \| - \|_2)$ ist gleichbedeutend mit Konvergenz im quadratischen Mittel.

In normierten Räumen ist das Konzept der Stetigkeit besonders leicht fassbar (dies ist einer der Vorteile von normierten Räumen).

Proposition 3.18. *Es seien V und W normierte Räume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*

- *f ist stetig.*
- *Es gibt ein $C > 0$ mit $\|f(v)\|_W \leq C \cdot \|v\|_V$ für alle $v \in V$.*

Zum Beweis siehe Forster 2, Satz 10 in Abschnitt 2.

Wir behandeln noch die Beispiele 2.3 und 2.4. aus Forster 2.

4. Vollständigkeit und Kompaktheit

In diesem Abschnitt diskutieren wir zwei für die Analysis besonders wichtige Konzepte: vollständige metrische Räume und kompakte topologische Räume.

Definition. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X,d) heißt *Cauchy-Folge*, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$d(x_n, x_m) < \epsilon$$

für alle $n, m \geq N$. Der metrische Raum (X,d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Jede in einem metrischen Raum konvergente Folge ist automatisch eine Cauchyfolge. Dies beweist man mit Hilfe der Dreiecksungleichung genauso wie für Folgen in $\mathbb{R}$.

Proposition 4.1. *$\mathbb{R}^n$ mit der gewöhnlichen Metrik ist vollständig.*

Beweis. Es sei (x_k) eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$. Da für alle $\nu = 1, \ldots, n$ und $k, l \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $|x_{k\nu} - x_{l\nu}| \leq \|x_k - x_l\|$ gilt, sind alle Komponentenfolgen $(x_{k\nu})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen. Diese konvergieren also jeweils gegen einen Punkt $x_\nu \in \mathbb{R}$, denn $\mathbb{R}$ ist vollständig. Da die Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^n$ gleichbedeutend mit der Konvergenz der Komponentenfolgen ist, erhalten wir $\lim x_k = x$ (wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)$). □

Die Menge $(0,1) \subset \mathbb{R}$ mit der induzierten Metrik ist nicht vollständig, denn die Folge $(1/n)_{n\geq 2}$ ist eine Cauchyfolge, hat aber keinen Grenzwert in $(0,1)$. Auch die Teilmenge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mit der induzierten Metrik ist nicht vollständig (es gibt rationale Folgen, die in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergieren). Ein interessantes Beispiel für einen vollständigen metrischen Raum ist $(C^0([0,1]), \| - \|_\infty)$ und allgemeiner $B(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm. Wir skizzieren einen Beweis der letzten Tatsache. Es sei also (f_n) eine Cauchyfolge. Dann sind für alle $x \in \mathbb{R}$ die Folgen $(f_n(x))$ Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$. Sei $y_x \in \mathbb{R}$ der Grenzwert. Wir erhalten eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y_x$. Wir behaupten, dass (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei $\epsilon > 0$. Da (f_n) eine Cauchyfolge bezüglich der Supremumsnorm ist, gibt es ein N, so dass $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Da die Betragsfunktion stetig ist, folgt somit $|f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Dies ist genau die behauptete gleichmäßige Konvergenz.

In vollständigen metrischen Räumen gilt das *Schachtelungsprinzip*, das wir auch schon bei der Untersuchung der reellen Zahlen kennengelernt haben. Siehe dazu Satz 4 in Abschnitt 2 von Forster 2.

Ist X ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum, so ist A mit der induzierten Metrik ebenfalls vollständig. Ist allgemeiner $A \subset X$ ein beliebiger Unterraum, so ist $\overline{A} \subset X$ der kleinste vollständige Unterraum von X, der A enthält, denn $\overline{A}$ besteht genau aus den Limiten von Folgen, die in A liegen und in X konvergieren.

Vollständige metrische Räume sind zentrale Objekte in der Analysis. Wir werden nun die erstaunliche Tatsache zeigen, dass jeder metrische Raum eine kanonische Vervollständigung besitzt. Dazu müssen zu dem gegebenen Raum die „fehlenden" Limiten von Cauchyfolgen künstlich hinzugenommen werden. Dies macht man mit folgendem raffinierten Trick:

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir bezeichnen mit $\widetilde{X}$ die Menge aller Cauchyfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X. Zur Abkürzung schreiben wir Folgen in fetten Buchstaben: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$. Wir setzen nun $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, falls

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0\,.$$

Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf $\widetilde{X}$ (der Nachweis ist leicht).

Es sei $Y = \widetilde{X}/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Wir bezeichnen mit $[\mathbf{x}]$ die Äquivalenzklasse der Cauchyfolge $\mathbf{x}$.

Proposition 4.2. *Durch die Setzung*

$$d_Y([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) := \lim_{n\mapsto\infty} d(x_n, y_n)$$

erhalten wir eine wohldefinierte vollständige Metrik auf Y.

Beweis. Wir machen uns zunächst klar, dass in jedem metrischen Raum (M, d) für alle Punkte p, q, r die Ungleichung $|d(p, q) - d(r, q)| \le d(p, r)$ gilt: Die beiden zu zeigenden Ungleichungen $d(p, q) - d(r, q) \le d(p, r)$ und $-(d(p, q) - d(r, q)) \le d(p, r)$ folgen leicht aus der Dreiecksungleichung.

Der Beweis erfolgt nun in mehreren Schritten.

Behauptung 1: Für Cauchyfolgen (x_n) und (y_n) in X ist die reelle Folge $d(x_n, y_n)$ eine Cauchyfolge und konvergiert somit (wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$).

Sei dazu $\epsilon > 0$ und N so groß, dass $d(x_n, x_m) < \epsilon$ und $d(y_n, y_m) < \epsilon$ für alle $n, m \ge N$. In unserer Situation erhalten wir somit

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| &\le |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_n)| + |d(x_m, y_n) - d(x_m, y_m)| \\ &\le d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) < 2\epsilon \end{aligned}$$

und daraus folgt die Behauptung.

Behauptung 2: Sind Cauchyfolgen (x_n), (x'_n), (y_n) und (y'_n) gegeben, so dass $\lim d(x_n, x'_n) = 0$ und $d(y_n, y'_n) = 0$, so folgt $\lim d(x_n, y_n) = \lim d(x'_n, y'_n)$. Dies sieht man mit der Abschätzung

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \le d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n)\,,$$

die man genauso wie eben beweist.

Aus den Behauptungen 1 und 2 folgt, dass die in der Proposition konstruierte Abbildung $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ wohldefiniert ist. Wir zeigen nun, dass es sich um eine Metrik handelt:

- Dass $d_Y([\mathbf{x}],[\mathbf{y}]) = 0$ genau dann, falls $[\mathbf{x}] = [\mathbf{y}]$, folgt genau aus der Definition der Äquivalenzrelation auf $\widetilde{X}$. (Hier sieht man auch, warum wir diese Äquivalenzrelation herausteilen müssen: Sonst hätte man keine Metrik).
- Die Symmetrie ist klar.
- Die Dreiecksungleichung folgt direkt aus der Dreicksungleichung für d: Sind (x_n), (y_n), und (z_n) Cauchyfolgen, so gilt

$$\lim d(x_n, z_n) \leq \lim(d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)) = \lim d(x_n, y_n) + \lim d(y_n, z_n)\,.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass diese Metrik auf Y vollständig ist. Dies ist der schwierigste Teil des Beweises.

Sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y. Für jedes Element y_k dieser Folge wählen wir eine Cauchyfolge $(x_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ in X, die y_k repräsentiert. Für $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ sei N_k so groß, dass $d(x_{kn}, x_{km}) < 1/k$ für alle $n, m \geq N_k$. Wir betrachten nun die Folge

$$\mathbf{x} := (x_{1N_1}, x_{2N_2}, x_{3N_3}, \ldots)$$

in X. Dies ist eine Art Diagonalfolge (aber nicht ganz). Zunächst behaupten wir, dass $\mathbf{x}$ eine Cauchyfolge in X ist. Sei dazu $\epsilon > 0$ gegeben und $K \in \mathbb{N}$ so groß, dass $d_Y(y_k, y_l) < \epsilon$ für alle $k, l \geq K$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $K > 1/\epsilon$. Für alle $k, l \geq K$ und alle $N \geq \max\{N_k, N_l\}$ ist dann mit der Dreiecksungleichung und der Definition von N_k und N_l und wegen $K > 1/\epsilon$

$$d(x_{kN_k}, x_{lN_l}) \leq d(x_{kN_k}, x_{kN}) + d(x_{kN}, x_{lN}) + d(x_{lN}, x_{lN_l}) < \epsilon + d(x_{kN}, x_{lN}) + \epsilon\,.$$

Lässt man hier N gegen unendlich gehen, folgt

$$d(x_{kN_k}, x_{lN_l}) \leq \epsilon + d_Y(y_k, y_l) + \epsilon < 3\epsilon$$

nach Wahl von K. Das zeigt, dass in der Tat $\mathbf{x}$ eine Cauchyfolge in X ist. Insbesondere repräsentiert also $\mathbf{x}$ ein Element $y \in Y$. Wir behaupten nun, dass in (Y, d_Y)

$$\lim_{k\mapsto\infty} y_k = y\,.$$

Sei dazu wieder $\epsilon > 0$ beliebig gewählt. Es sei K so groß, dass $d_Y(y_k, y_l) < \epsilon$ für alle $k, l \geq K$. Wieder nehmen wir an, dass $K > 1/\epsilon$. Für alle $k \geq K$, alle $n \geq N_k$ sowie alle $N \geq \max\{N_k, N_n\}$ ist dann

$$d(x_{kn}, x_{nN_n}) \leq d(x_{kN}, x_{kn}) + d(x_{kN}, x_{nN}) + d(x_{nN}, x_{nN_n}) < \epsilon + d(x_{kN}, x_{nN}) + \epsilon$$

Lässt man hier N gegen unendlich gehen, folgt, wenn wir zusätzlich $n \geq k$ annehmen,

$$d(x_{kn}, x_{nN_n}) \leq \epsilon + d_Y(y_k, y_n) + \epsilon < 3\epsilon\,.$$

Diese Ungleichung gilt für alle $n \geq \max\{N_k, k\}$, somit haben wir

$$d_Y(y_k, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_{kn}, x_{nN_n}) \leq 3\epsilon\,.$$

Diese Ungleichung gilt für alle $k \geq K$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Wir haben nun einen recht abstrakten, aber immerhin vollständigen, metrischen Raum $(Y = \widetilde{X}/\sim, d_Y)$ konstruiert. Es bleibt noch die Beziehung zu (X, d_X) zu klären.

Dazu betrachten wir für $x \in X$ die konstante Folge $\mathbf{x} := (x, x, x, x, \ldots) \in \widetilde{X}$. Dies ist offensichtlich eine Cauchyfolge und representiert daher ein Element $[\mathbf{x}] \in Y$. Für $x, y \in X$ beobachten wir

$$d_Y([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$$

wobei hier $x_n := x$ und $y_n := y$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist der Limes gleich $d(x, y)$. Die Abbildung

$$\phi : X \to Y\ ,\ x \mapsto [(x, x, x, x, \ldots)]$$

ist also eine *isometrische Einbettung*, d.h. $d_Y(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Insbesondere ist die Abbildung ϕ injektiv. Wir werden in den Übungen sehen, dass $\phi(X) \subset Y$ eine dichte Teilmenge ist. Wir fassen zusammen:

Satz 4.3. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum und (Y, d_Y) der wie oben definierte metrische Raum. Dann ist Y vollständig und die Abbildung $\phi : X \to Y$, $x \mapsto [(x, x, x, \ldots)]$ ist eine isometrische Einbettung, die X mit einem dichten Unterraum von (Y, d_Y) identifiziert.*

Wir nennen (Y, d_Y) die *kanonische Vervollständigung* von (X, d). Wenn man mit $X = \mathbb{Q}$ (und dem üblichen Abstandsbegriff auf $\mathbb{Q}$) startet, kann man auf diese Weise die reellen Zahlen konstruieren.

Definition. Ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Vektorraum.

Wir werden in der Übung sehen, dass die Vervollständigung eines normierten Raumes ein Banachraum ist (d.h. man kann auf der Vervollständigung die Struktur eines normierten Vektorraumes konstruieren, so dass die Norm die von uns eben konstruierte vollständige Metrik induziert).

Insbesondere erhalten wir (für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$) durch Vervollständigung der normierten Räume $(C^0([a, b]), \| - \|_p)$, $p \geq 1$, die Banachräume $L^p([a, b])$. Diese spielen in der Analysis eine sehr wichtige Rolle.

Bisher haben wir aber leider nur (durch unsere abstrakte Konstruktion) ein wenig anschauliches Modell dieser Banachräume. In der Vorlesung Analysis 3 wird mit Hilfe der Lebesgueschen Integrationstheorie eine konkrete Interpretation der bei der Vervollständigung „neu hinzugekommenen“ Punkte in $L^p([a, b])$ gegeben.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum. Eine *offene Überdeckung* von X ist eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Teilmengen von X, mit

$$\bigcup_{i\in I} U_i = X\,.$$

Der Raum X heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. es eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$ gibt, so dass $X = \bigcup_{i\in I_0} U_i$.

Man beachte: Ist X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge, so ist A mit der Unterraumtopologie genau dann kompakt, wenn folgendes gilt: Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von offenen Mengen in X, so dass $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, so gibt es eine endliche Indexmenge $I_0 \subset I$, so dass $A \subset \bigcup_{i\in I_0} U_i$. Dies folgt aus der Definition des Teilraumtopologie. Wir erhalten auf diese Weise (für Teilräume von metrischen Räumen) genau die Kompaktheitsdefinition aus Forster 2, Abschnitt 3.

Diese in Forster angegebenen Formulierung ist aber in meinem Augen insofern etwas problematisch als sie suggeriert, dass es bei der Kompaktheit von $A \subset X$ auf den umgebenden Raum X ankommt. Vielmehr ist aber Kompaktheit eine absolute Eigenschaft (im Gegensatz zu offener und abgeschlossener Teilmenge, Innerem, Abschluss und Rand), die einem topologischen Raum entweder zukommt oder nicht.

Wir behandeln Satz 3.1. und Beispiel 3.2. aus Forster 2.

Folgende Umformulierung der Kompaktheitsdefinition ist manchmal nützlich (siehe Tutorium):

Proposition 4.4. *Ein Raum X ist genau dann kompakt, falls folgendes gilt: Es sei $(C_i)_{i\in I}$ eine Menge abgeschlossener Teilmengen von X, so dass der Schnitt je endlich vieler dieser Teillmengen nicht leer ist. Dann gilt $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$.*

Proposition 4.5. *Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorffraumes ist abgeschlossen.*

Beweis. Es sei X Hausdorffsch und $A \subset X$ kompakt. Wähle ein beliebiges $x \in X \setminus A$. Ist $a \in A$, so gibt es (in X) offene disjunkte Umgebungen U_a von a und V_a von x. Da A kompakt ist und $A \subset \bigcup_{a\in A} U_a$, gibt es endlich viele Punkte $a_1, \ldots, a_k \in A$ mit $A \subset U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_k}$. Dann liegt die offene Umgebung $V_{a_1} \cap \ldots \cap V_{a_k}$ von x ganz in $X \setminus A$. Dieses Argument zeigt, dass $X \setminus A$ offen und somit A abgeschlossen ist. □

Proposition 4.6. *Ist X kompakt und $f : X \to Y$ stetig, so ist auch $f(X) \subset Y$ kompakt.*

Beweis. Ist (U_i) eine offene Überdeckung von $f(X)$, so ist $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Da diese eine endliche Teilüberdeckung besitzt, gilt dies also auch für (U_i). □

Proposition 4.7. *Jeder abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist kompakt.*

Beweis. Sei X kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Familile offener Mengen in X mit $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Da X kompakt ist, hat die offene

Überdeckung $(U_i)_{i\in I} \cup \{X \setminus A\}$ von X eine endliche Teilüberdeckung. Somit überdeckt auch eine endliche Teilfamilie von $(U_i)_{i\in I}$ die Menge A. $\square$

Die letzten drei Tatsachen haben folgende wichtige Konsequenz:

Satz 4.8. *Es sei $f : X \to Y$ eine bijektive stetige Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum. Dann ist f ein Homöomorphismus.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass f^{-1} stetig ist. Da f bijektiv ist, können wir gleichbedeutend nachweisen, dass f *abgeschlossen* ist, d.h. ist $A \subset X$ abgeschlossen, so auch $f(A) \subset Y$. Ist aber $A \subset X$ abgeschlossen, so ist A kompakt, somit auch $f(A) \subset Y$ und damit ist $f(A)$ als kompakter Teilraum des Hausdorffraumes Y abgeschlossen. $\square$

Beispiel. Die Abbildung $[0, 1) \to S^1$, $x \mapsto \exp(i2\pi x)$ ist stetig (wobei wir $S^1 \subset \mathbb{C}$ mit der Teilraummetrik versehen) und bijektiv. Dies folgt leicht aus der Stetigkeit von $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit Hilfe des ϵ-δ-Kriteriums. Die Umkehrabbildung f^{-1} ist aber nicht stetig: Das Bild der in $[0, 1)$ abgeschlossenen Teilmenge $[1/2, 1) \subset [0, 1)$ unter f (d.h. das Urbild unter f^{-1}) ist nicht abgeschlossen in S^1, denn $1 \in S^1$ liegt zwar im Abschluss von $f([1/2, 1))$, aber nicht in $f([1/2, 1))$.

Wir betrachten nun wieder den Spezialfall der metrischen Räume. Zur Erinnerung: Wir nennen einen metrischen Raum X *beschränkt*, falls $\operatorname{diam} X = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\} < \infty$.

Proposition 4.9. *Ist X ein kompakter metrischer Raum. Dann ist X beschränkt.*

Beweis. Es sei $x \in X$. Dann bildet die Familie von offenen Kugeln $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung, d.h. ein N mit $X = B_N(x)$. Daraus folgt, dass X beschränkt ist. $\square$

Da jeder metrische Raum die Hausdorffeigenschaft hat, folgt aus Proposition 4.5: Ist X ein metrischer Raum und $A \subset X$ ein kompakter Teilraum, so ist A abgeschlossen in X. Zusammen mit dem letzten Resultat erhalten wir so Satz 3.3. in Forster 2.

Für metrische Räume ist Kompaktheit gleichbedeutend mit *Folgenkompaktheit*.

Definition. Wir nennen einen topologischen Raum X *folgenkompakt*, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

Das heißt, in folgenkompakten Räumen gilt eine verallgemeinerte Form des Satzes von Bolzano-Weierstraß.

Satz 4.10. *Es sei X ein metrischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- *X ist kompakt.*
- *X ist folgenkompakt.*

Beweis. Es sei X kompakt. Angenommen, X ist nicht folgenkompakt. Es sei (x_n) eine Folge in X ohne konvergente Teilfolgt. Dann gibt es für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U_x \subset X$, die nur endlich viele Folgenglieder enthält (ansonsten könnte man eine Teilfolge konstruieren, die gegen x konvergiert). Die offene Überdeckung $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ von X hat nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung. Dann enthält aber X insgesamt nur endlich viele Folgenglieder x_n, was absurd ist.

Es sei umgekehrt X folgenkompakt. Wir betrachten eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X und müssen eine endliche Teilüberdeckung finden.

Wir beweisen zunächst die Existenz einer sogenannten *Lebesguezahl* für X, d.h. einer Zahl $\epsilon > 0$, so dass jeder offene Ball in X mit Radius ϵ ganz in einer offenen Menge U_i aus der gegebenen Familie enthalten ist. Angenommen, so ein ϵ existiert nicht. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ ein $x_n \in X$, so dass der offene Ball $B_{1/n}(x)$ in keiner offenen Menge U_i enthalten ist. Da X folgenkompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert. Dieses x ist in einem U_{i_0} enthalten. Da diese Menge offen ist, gibt es ein N, so dass $B_{1/N}(x) \subset U_{i_0}$. Wir wählen n_k so groß, dass $d(x_{n_k}, x) < 1/(2N)$ und so dass $n_k \geq 2N$. Dann ist nach der Dreiecksungleichung $B_{1/n_k}(x_{n_k}) \subset B_{1/N}(x_{n_k}) \subset U_{i_0}$, was der Wahl von x_{n_k} widerspricht. Damit muss eine Lebesguezahl ϵ existieren.

Wir zeigen nun, dass sich mit dieser Lebesguezahl ϵ der Raum X durch endlich viele offene ϵ-Bälle überdecken lässt. Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann können wir induktiv eine Folge (x_n) in X konstruieren, so dass für alle $n \geq 0$ das Folgenglied x_{n+1} von allen schon konstrierten Punkten $x_0, x_1, \ldots, x_n$ einen Abstand mindestens ϵ hat (denn die endlich vielen Bälle $B_\epsilon(x_0), \ldots, B_\epsilon(x_n)$ überdecken ja X nach Annahme nicht). Dann hat aber (x_n) keine konvergente Teilfolge, im Widerspruch zur Annahme.

Wir können also doch X durch endliche viele ϵ-Bälle überdecken. Da jeder dieser Bälle ganz in einem U_i enthalten ist, besitzt also (U_i) eine endliche Teilüberdeckung und X ist kompakt. □

Mit Hilfe dieses Kriteriums können wir folgenden Satz beweisen:

Satz 4.11 (Heine-Borel)**.** *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt (bzgl. der Euklidischen Metrik) und abgeschlossen ist.*

Beweis. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Wir haben bereits in den Propositionen 4.5 und 4.9 gezeigt, dass dann beschränkt und als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ abeschlossen ist.

Sei umgekehrt A beschränkt und abgeschlossen. Wir zeigen, dass A folgenkompakt ist. Sei also (x_k) eine Folge in A. Dann ist die Folge $(x_{k1})_{k \in \mathbb{N}}$ der ersten Komponenten beschränkt und besitzt somit nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (aus Analysis 1) eine konvergente Teilfolge $(x_{k_l 1})_{l \in \mathbb{N}}$.

Die entstehende Teilfolge $(x_{k_l 2})_{k\in\mathbb{N}}$ der zweiten Komponenten ist ebenfalls beschränkt und besitzt daher eine konvergente Teilfolge. Induktiv können wir so eine Teilfolge der ursprünglichen Folge (x_k) konstruieren, so dass jede Komponentenfolge konvergiert. Damit konvergiert dann die Teilfolge selbst. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ der Grenzwert. Da A abgeschlossen ist, gilt $x \in A$. □

Im Buch von Forster wird dieses Ergebnis mit einem anderen, direkteren Argument bewiesen. Wir folgern es aus der Äquivalenz von Kompaktheit und Folgenkompaktheit für metrische Räume, was ja für sich genommen auch ein recht interessantes Resultat ist.

Beispiel. Die Menge $O(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ der orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen (mit der von $\mathbb{R}^{n^2}$ induzierten Topologie) ist kompakt: Die Menge $O(n)$ ist beschränkt, denn die Zeilenvektoren in orthogonalen Matrizen haben alle Länge 1, damit sind die Beträge der Einträge in orthogonalen Matrizen durch 1 beschränkt. Weiterhin ist $O(n)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Dies liegt daran, dass die Transposition von Matrizen, sowie die Matrizenmultiplikation stetig sind und dass $O(n) = \phi^{-1}(\{E_n\})$, wobei $\phi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\phi(A) := AA^T$ und $E_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix ist. An dieser Stelle sollte man sich daran erinnern (siehe Proposition 3.6), dass in jedem Hausdorffraum (wie z.B. $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit der Metrik von $\mathbb{R}^{n^2}$) jede einpunktige Menge abgeschlossen ist.

Wir besprechen zum Abschluss dieses Kapitels noch den Satz von Stone-Weierstraß. Es sei dazu K ein kompakter topologischer Raum und $C(K)$ sei der reelle normierte Raum der stetigen Funktionen $K \to \mathbb{R}$ versehen mit der Supremumsnorm (die mit der Maximumsnorm übereinstimmt, da jede stetige Funktion auf K ihr Maximum und ihr Minimum annimmt). Wir bezeichnen die Maximumsnorm im Folgenden mit $\| - \|$ (anstatt $\| - \|_\infty$). Wir erinnern, dass dies die Norm der gleichmäßigen Konvergenz ist: Eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in $(C(K), \| - \|)$ gegen $\phi \in C(K)$, falls es für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|\phi(x) - \phi_n(x)| < \epsilon$ für alle $x \in K$ und alle $n \geq N$.

Es gilt nun das folgende erstaunliche Resultat.

Satz 4.12 (Approximationssatz von Stone-Weierstraß)**.** *Es sei $A \subset C(K)$ eine Teilmenge mit den folgenden Eigenschaften:*

- *A ist ein reeller Untervektorraum und sind $f, g \in A$, so gilt $f \cdot g \in A$.*
- *A enthält die konstante Funktion $1_K : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$.*
- *Für alle $s, t \in K$ gibt es ein $f \in A$ mit $f(s) \neq f(t)$. Man sagt auch A* trennt die Punkte aus *K.*

Dann liegt A dicht in $C(K)$ (d.h. $\overline{A} = C(K)$). Mit anderen Worten: Für alle $\phi \in C(K)$ und alle $\epsilon > 0$ existiert ein $f \in A$ mit $\sup_{x\in K} |f(x) - \phi(x)| < \epsilon$.

Dies ist neben der Taylorapproximation und der Fourierentwicklung das dritte wichtige Approximationsresultat, das wir in dieser Vorlesung besprechen.

Zur Vorbereitung des Beweises zeigen wir:

Proposition 4.13. *Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \sqrt{x}$. Dann gibt es eine Folge von Polynomfunktionen $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Einschränkung auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis. Wir definieren die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induktiv durch $p_0 := 0$, $p_{n+1}(x) := p_n(x) + \frac{1}{2}(t - p_n^2(x))$. Wir beweisen durch Induktion nach n:

- $p_n^2(x) \le x$,
- $p_{n+1}(x) \ge p_n(x)$

für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Beide Aussagen sind klar für $n = 0$. Wir berechnen nun

$$x - p_{n+1}^2(x) = (x - p_n^2(x))(1 - p_n(x) - \frac{1}{4}(x - p_n^2(x)))\,.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $x - p_n^2(x) \ge 0$. Es ist aber auch (wegen $x \le 1$)

$$4 - 4p_n(x) - (x - p_n^2(x)) \ge 4 - 4p_n(x) - 1 + p_n^2(x) = (p_n(x) - 2)^2 - 1 \ge 0$$

da $0 \le p_n(x) \le 1$ (denn $0 \le p_1(x) \le \ldots \le p_n(x) \le x \le 1$ wurde für alle $x \in [0,1]$ bereits gezeigt). Damit ist in der Tat $p_{n+1}^2(x) \le x$. Die Aussage $p_{n+2}(x) - p_{n+1}(x) \ge 0$ folgt nun aus dieser Aussage und aus der Rekursionsformel für p_{n+2}.

Da für alle $x \in [0,1]$ die Folge $(p_n(x))$ monoton wachsend und beschränkt ist, existiert der Grenzwert. Nennen wir diesen p_x, so liefert einsetzen in die rekursive Gleichung, dass $p_x^2 = x$ für alle $x \in [0,1]$.

Damit ist (p_n) eine monoton wachsende Folge stetiger Funktionen, die auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ punktweise gegen die stetige Funktion f konvergiert. Nach dem Satz von Dini konvergiert dann (p_n) auf $[0,1]$ sogar gleichmäßig gegen f. □

Der Satz von Dini wurde zwar auf dem ersten Übungsblatt behandelt. Der folgende Beweis stellt aber nocheinmal klar heraus, wie effektiv der Begriff der Kompaktheit genutzt werden kann.

Proposition 4.14 (Satz von Dini)**.** *Es sei K ein kompakter topologischer Raum und (f_n) eine monoton wachsende Folge stetiger Funktionen $f_n : K \to \mathbb{R}$, die punktweise gegen die stetige Funktion $F : K \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann konvergiert f_n auf K sogar gleichmäßig gegen F.*

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da f_n punktweise konvergiert und jedes f_n stetig ist, existiert für jedes $x \in K$ eine offene Umgebung $U_x \subset K$ von x und ein $N_x \in \mathbb{N}$, so dass $|f_{N_x}(x) - F(x)| < \epsilon$ für alle $x \in U_x$. Da die Folge (f_n) monoton wachsend ist, gilt letzter Abschätzung sogar für alle f_n mit $n \ge N_x$. Die Familie $(U_x)_{x\in K}$ bildet eine offene Überdeckung von K und besitzt wegen der Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung $(U_{N_{x_1}}, \ldots, U_{N_{x_k}})$. Wir setzen $N := \max\{N_{x_1}, \ldots, N_{x_k}\}$. Dann gilt für alle $n \ge N$ und für alle $x \in K$ die Abschätzung $|f_n(x) - F(x)| < \epsilon$ und dies war zu zeigen. □

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes von Stone-Weierstraß. Es sei $A \subset C(K)$ eine Teilmenge mit den in Theorem 4.12 beschriebenen Eigenschaften. In einem ersten Schritt überzeugen wir uns davon, dass auch die Teilmenge $\overline{A}$ diese Eigenschaften hat.

Seien also $f, g \in \overline{A}$. Dann gibt es Folgen (f_n), (g_n) in A, die gleichmäßig gegen f und g konvergieren. Wir behaupten, dass dann die Folge $(f_n \cdot g_n)$ (aus Funktionen in A) gleichmäßig gegen $f \cdot g$ konvergiert. Da f_n nur aus stetigen Funktionen besteht (die alle auf K jeweils ihr Maximum und Minimum annehmen) und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergiert (die auch ihr Maximum und Minimum auf K annimmt), ist diese Folgen global beschränkt, d.h. es gibt ein $C > 0$, so dass $|f_n(x)| \leq C$ für alle $x \in K$. Da g stetig ist, können wir darüberhinaus annehmen, dass $|g(x)| \leq C$ für alle $x \in K$. Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig und $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2C}$ und $|g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2C}$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in X$. Dann gilt

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leq |f_n(x)(g_n(x) - g(x))| + |g(x)(f_n(x) - f(x))| < \epsilon\,.$$

Der Beweis, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Funktion $\alpha f + \beta g \in \overline{A}$ führt man ganz ähnlich. Wegen $\overline{A} \supset A$ ist klar, dass $1_K \in \overline{A}$ und dass $\overline{A}$ Punkte in K trennt.

Zu Beweis des Satzes von Stone-Weierstraßzeigen genügt es also zu zeigen: Es sei $A \subset C(K)$ eine abgeschlossene Teilmenge mit den Eigenschaften aus Theorem 4.12. Dann gilt $A = C(K)$. Wir zeigen zunächst:

Proposition 4.15. *Es seien $f \in A$. Dann liegt auch die Funktion $|f| : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$ in A.*

Beweis. Da f ihr Maximum und Minimum annimmt, können wir annehmen, dass $-1 \leq f(x) \leq 1$ für alle $x \in K$. Nach Proposition 4.13 konvergiert die Folge $(p_n \circ f^2)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf K gegen $\sqrt{f^2} = |f|$. (Die Verkettung $p_n \circ f^2$ bedeutet, dass man die Funktion f^2 in das Polynom p_n einsetzt). $\square$

Als Folgerung notieren wir, dass mit $f, g \in A$ auch $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \in A$ und $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ in A liegen.

Es sei nun $\phi \in C(K)$ und $\epsilon > 0$. Wir wollen zeigen, dass es ein $f \in A$ gibt, so dass $\|\phi - f\| < \epsilon$.

Es seien $s, t \in K$ mit $s \neq t$. Da A Punkte trennt, gibt es ein $h \in A$ mit $h(s) \neq h(t)$. Sind $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so setzen wir

$$\widetilde{h}(x) := \mu + (\lambda - \mu)\frac{h(x) - h(t)}{h(s) - h(t)}$$

Es ist $\widetilde{h}(x) \in A$ und $\widetilde{h}(s) = \lambda$, $\widetilde{h}(t) = \mu$.

Daraus folgt: Für alle $s, t \in K$ existiert ein $f_{s,t} \in A$ mit $f_{s,t}(s) = \phi(s)$ und $f_{s,t}(t) = \phi(t)$. Für $s \neq t$ nehmen wir dazu $\widetilde{h}$ mit $\lambda := \phi(s)$ und $\mu := \phi(t)$. Für $s = t$ setzen wir $f_{s,t}(x) := \phi(s) \cdot 1_K$.

Da $f_{s,t}$ stetig ist, approximiert $f_{s,t}$ die gegebene Funktion ϕ in Umgebungen von s und von t und stimmt in s und in t sogar mit ϕ überein. Es sei nun $s \in K$ fest. Für variables $t \in K$ setzen wir

$$U_t := \{x \in K \mid f_{s,t}(x) < \phi(x) + \epsilon\}\,.$$

Da die Funktion ϕ und für alle $t \in K$ die Funktion $f_{s,t}$ stetig sind und $t \in U_t$, bildet $(U_t)_{t\in K}$ eine offene Überdeckung von K. K ist kompakt. Also gibt es endlich viele Punkte $t_1, \ldots, t_n \in K$, so dass $K = U_{t_1} \cup \ldots \cup U_{t_n}$. Wir setzen nun $h_s := \min\{f_{s,t_1}, \ldots, f_{s,t_n}\}$. Dies führen wir für alle $s \in K$ durch. Es gilt dann für $s \in K$

- $h_s \in A$,
- $h_s(s) = s$,
- $h_s < \phi + \epsilon$.

Wir setzen nun $V_s := \{x \in K \mid h_s(x) > \phi(x) - \epsilon\}$. Jede Menge V_s ist offen in K und wegen $s \in V_s$ gilt $K = \bigcup_{s\in K} V_s$. Da K kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $s_1, \ldots, s_m \in K$ mit $K = V_{s_1} \cup \ldots \cup V_{s_m}$. Wir setzen $f := \max\{h_{s_1}, \ldots, h_{s_m}\}$. Dann ist $f \in A$ und

$$\phi - \epsilon < f < \phi + \epsilon\,,$$

das heißt $\|f - \phi\| < \epsilon$.

Wir haben somit gezeigt, dass für jedes $\phi \in C(K)$ eine Folge (f_n) in A existiert, die gleichmäßig gegen ϕ konvergiert. Da A abgeschlossen in $C(K)$ ist, folgt daraus $\phi \in A$.

Damit ist der Satz von Stone-Weierstraß bewiesen.

Korollar 4.16 (Appromimationssatz von Weierstraß)**.** *Es seien $a < b$ reelle Zahlen und Es sei $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ eine Polynomfunktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einer Variablen, so dass*

$$\max_{t\in[a,b]}\{|P(t) - \phi(t)|\} < \epsilon$$

Kurz gesagt: Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen lassen sich beliebig genau gleichmäßig durch Polynome approximieren.

Beweis. Es sei $A \subset C([a,b])$ die Menge der Einschränkungen von Polynomfunktionen auf das Intervall $[a,b]$. Dann erfüllt A die Voraussetzungen des Satzes von Stone-Weierstraß: Linearkombinationen und Produkte von Polynomfunktionen sind wieder Polynomfunktionen. Die konstante Funktion $1_{[a,b]} : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Einschränkung der Polynomfunktion $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$. Sind außerdem $s, t \in [0,1]$, $s \neq t$, so gilt für das Polynom $P(x) := x$, dass $P(s) = s \neq t = P(t)$, d.h. A trennt Punkte in $[a,b]$. Damit folgt die Behauptung aus dem Satz von Stone-Weierstraß. $\square$

Die systematische Untersuchung von Funktionenräumen mit Hilfe topologischer Methoden ist Gegenstand der Funktionalanalysis.

5. Kurven im $\mathbb{R}^n$

Dies ist wieder etwas anschaulicher. Wir diskutieren Kurven im $\mathbb{R}^n$, also stetige Abbildungen $[a, b] \to \mathbb{R}^n$, wobei $a < b \in \mathbb{R}$. Besonders wichtig ist dabei der Begriff der Rektifizierbarkeit und die Berechnung der Länge von stetig differenzierbaren Kurven. Siehe Forster 2, Kapitel 4.

6. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Dieser Abschnitt entspricht den Abschnitten 5 und 6 in Forster 2, wo die grundlegenden Begriffe der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ eingeführt und diskutiert werden: Partielle Ableitungen, höhere Ableitungen und Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der Ableitungsreihenfolge k-ter partieller Ableitungen bei k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Definition der Operatoren grad, bzw. ∇ (Gradient), div (Divergenz), rot (Rotation) und Δ (Laplaceoperator) sowie deren Rolle in partiellen Differentialgleichungen aus der Physik (Wellengleichung, Wärmeleitungsgleichung etc.), totale Differenzierbarkeit.

Die Definition der totalen Differenzierbarkeit einer Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, in einem Punkt $x \in U$, ist fundamental (siehe Forster 2, Kapitel 6). Die dabei auftretende Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt *Jacobimatrix* oder auch *Differential* von f in x und wird mit $Df(x)$ oder mit $D_x f$ bezeichnet. Die Zeilen von $Df(x)$ sind genau die Gradienten der Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_m : U \to \mathbb{R}^m$ von f im Punkt x.

Sind $n = m = 1$, so ist die totale Differenzierbarkeit von f im Punkt $x \in U$ nichts anderes als die gewöhnliche Differenzierbarkeit von f in x (als Funktion einer Veränderlichen). Es gilt dann $Df(x) = f'(x)$.

Falls f (wieder für beliebiges n und m) im Punkt x stetig partiell differenzierbar ist (d.h. alle partiellen Ableitungen existieren in einer Umgebung von x und diese sind stetig in x), so ist f in x auch total differenzierbar (siehe Forster 2, Satz 2 in Abschnitt 6). Da dann alle Einträge der Jacobimatrix stetig in x sind, nennt man dann auch f *stetig differenzierbar* in x. Es kann aber durchaus sein, dass f total differenzierbar in x ist, jedoch dort nicht stetig differenzierbar. Dies kann schon bei Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ passieren: Es gibt Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar sind, z.B. ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$, falls $x \neq 0$, und $0 \mapsto 0$ differenzierbar, aber f' ist nicht stetig in 0.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ muss anders formuliert werden als im $\mathbb{R}^1$ (siehe Forster 2, Abschnitt, Satz 5). Als Anwendung erhält man eine Normabschätzung der Differenz $f(x) - f(y)$ einer stetig differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ an zwei Punkten $x, y \in U$ mit Hilfe der Maximums der Norm der Jacobimatrix auf der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte (falls diese ganz in U liegt), siehe Forster 2, Corollar nach Satz 5 in Abschnitt 6.

7. Taylorformel, lokale Extrema

Siehe Forster 2, Abschnitt 7. Wichtig ist hier, dass das Verschwinden des Gradienten nur dann ein notwendiges Kriterium für das Auftreten von Extrema ist, wenn man innere Punkte des Definitionsbereiches betrachtet. Für lokale Extrema auf dem Rand sind in der Regel weitergehende Überlegungen notwendig, vgl. Aufgabe 2 auf dem 10. Übungsblatt.

8. Implizite Funktionen, Untermannigfaltigkeiten, lokale Extrema mit Nebenbedingungen

Oft (z.B. in der algebraischen Geometrie) sind Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ als Nullstellengebilde von Gleichungen gegeben. Ein Beispiel ist die n-Späre

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\} .$$

Allgemeiner betrachten wir Teilmengen $M = F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$, wobei $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist (in obigem Beispiel haben wir $F(x) := \|x\|^2 - 1$) und wir stellen die Frage ob neben dieser „impliziten“ Beschreibung von M (als Urbild der 0 von F) auch eine „explizite“ Beschreibung möglich ist, d.h. ob man einen Teil der Koordinaten auf M als Funktion eines anderen Teils der Koordinaten ansehen kann. In der Regel ist dies nicht machbar: Es gibt keine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$, so dass der Graph von f mit $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ übereinstimmt, denn meist gehören auf S^1 zu einem x-Wert zwei y-Werte und zu einem y-Wert zwei x-Werte.

Der Satz über implizite Funktionen gibt hier eine umfassende Antwort. Siehe Forster 2, Satz 2 in Abschnitt 8. Ist $F(a, b) = 0$, so ist die Ableitung der in diesem Satz konstruierten Funktion $g : V_1 \to V_2$ im Punkt a durch die Formel

$$Dg(a) = -\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(a, b)$$

gegeben, siehe Forster 2, S. 91 oben.

In der Vorlesung haben wir den Beweis so gegliedert, dass wir zunächst davon ausgehen, wir hätten bereits eine *stetige* Funktion g mit den verlangten Eigenschaften konstruiert, und daraus die stetige Differenzierbarkeit folgern, Siehe Forster 2, S. 93 f. Der Beweis hierfür verläuft geradlinig, besonders erwähnenswert ist vielleicht die Abschätzung an $\|g(x)\|$ auf S. 94 oben, wo zunächst diese Norm auf beiden Seiten der Ungleichung auftritt, jedoch mit verschiedenen Koeffizienten.

Die Konstruktion der stetigen Abbildung g beruht auf dem Banachschen Fixpunktsatz (Forster 2, Satz 1 in Abschnitt 8), der auch für sich genommen ein sehr anwendungsreiches Resultat in vielen Bereichen der Mathematik darstellt.

Für die Konstruktion von g wenden wir den Banachschen Fixpunktsatz auf den Banachraum der beschränkten stetigen Funktionen $V_1 \to \mathbb{R}^m$ (mit einer geeigneten offenen Teilmenge $V_1 \subset \mathbb{R}^k$) mit der Supremumsnorm und den abgeschlossenen Unterraum derjenigen Funktionen an, deren Bild in der abgeschlossenen Kugel $\overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^m$ enthalten ist (mit einem geeigneten $r > 0$). Details finden sich in Forster 2, S. 92.

Der Satz über implizite Funktionen ist wohl eines der tiefliegendsten Resultate in der Grundausbildung in Analysis. Man sollte neben dem Studium des Beweises insbesondere versuchen, eine gute Anschauung über den Inhalt dieses Satzes zu gewinnen. Dies kann man gut an Hand der Diskussion von Höhenlinien tun (siehe Forster 2, S. 94 f.) und - allgemeiner - von Untermannigfaltigkeit (siehe unten).

Eine wichtige Anwendung des Satzes über implizite Funktionen ist der Satz über Umkehrabbildungen, siehe Forster 2, Satz 3 in Abschnitt 8. Dieses Resultat verallgemeinert die folgende Tatsache aus der Differentialrechnung einer Unbekannten: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x \in \mathbb{R}$ ein Punkt mit $f'(x) \neq 0$ (d.h. $Df(x) = f'(x) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ stellt eine invertierbare Matrix dar), so ist in einer Umgebung von x die Abbildung f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend und somit dort umkehrbar. Außerdem ist die Umkehrfunktion f^{-1} in $y = f(x)$ differenzierbar und $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, siehe Forster 1, Satz 3 in Abschnitt 15.

Eine interessante Anwendung liegt in der Behandlung von Koordinatentransformationen. Im Forster 2 werden in Beispiel (8.4.) ebene Polarkoordinaten diskutiert, auf dem Übungsblatt 12, Aufabe 4, findet sich das Beispiel der Zylinderkoordinaten.

Aus Zeitgründen besprechen wir Untermannigfaltigkeiten weniger ausführlich als in Forster 2, Abschnitt 9.

Wir gehen von folgender Definition aus (siehe Forster 2, Satz 2 b in Abschnitt 9).

Definition. Wir nennen eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine *Untermannigfaltigkeit* der *Dimension* k, falls folgendes gilt: Es sei $a \in M$. Dann gibt es - nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten - offene Umgebungen $U' \subset \mathbb{R}^k$ von $a' := (a_1, \dots, a_k)$ und $U'' \subset \mathbb{R}^{n-k}$ von $a'' := (a_{k+1}, \dots, a_n)$ sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U' \to U''$, so dass

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' \mid x'' = g(x')\} .$$

Mit anderen Worten: M ist lokal Graph einer auf einer k-dimensionalen Koordinatenumgebung $U' \subset \mathbb{R}^k$ definierten Abbildung $U' \to U''$.

Mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen können wir Untermannigfaltigkeiten auf folgende Weise erhalten.

Proposition 8.1. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ sowie $F : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, und für alle $x \in F^{-1}(0)$ sei das Differential $DF(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (betrachtet als lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) surjektiv . Dann ist $M := F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $k = n - m$.*

Beweis. Es sei $a \in M$. Nach geeigneter Umnummerierung der Koordinaten können wir annehmen, dass die Matrix $\frac{\partial F}{\partial y}(a', a'')$ invertierbar ist. Hier schreiben wir wieder die Koordinaten in $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ als (x, y) und zerlegen a entsprechend in (a', a''). Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt nun die Behauptung. $\square$

Dieses Resultat motiviert die folgende Definition.

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^m$ sei stetig differenzierbar. Ein Punkt $c \in \mathbb{R}^m$ heißt *regulärer Wert* von F, falls für alle $x \in F^{-1}(c)$ das Differential $DF(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist. Ist c kein regulärer Wert, so heißt c ein *singulärer Wert* von F.

Man beachte, dass insbesondere dann c ein regulärer Wert ist, falls $c \notin \operatorname{im} F$.

Korollar 8.2. *Es sei c ein regulärer Wert von F. Dann ist $F^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $m - n$ (die möglicherweise leer ist).*

Dies ist das nichtlineare Analogon des folgenden Resultates aus der linearen Algebra: Ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine surjektive lineare Abbildung, so ist der Kern von F ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n - m$.

Beispiel. Wir betrachten $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Wir behaupten, dass jedes $c > 0$ ein regulärer Wert ist. Dazu betrachten wir $DF(x, y) = \operatorname{grad} F(x, y) = (2x, 2y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Dieses Differential ist (aufgefasst als lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) genau dann surjektiv, falls $(2x, 2y) \neq 0$. Falls $F(x, y) = c$ gilt, so folgt aber wegen $c > 0$ die Eigenschaft $(x, y) \neq 0$. Daher ist in der Tat $DF(x, y)$ an allen Stellen $(x, y) \in F^{-1}(0)$ surjektiv.

Wir haben damit aufs Neue gezeigt, dass der Kreis mit Radius $\sqrt{c}$ in $\mathbb{R}^2$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

Der Punkt $c = 0$ ist ein singulärer Wert von F. Die Punkte $c < 0$ sind wieder reguläre Werte, allerdings ist dann $F^{-1}(c)$ leer.

Untermannigfaltigkeiten der Dimension 1 nennt man auch *eingebettete Kurven*, zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten *eingebettete Flächen.* Das Studium von Untermannigfaltigkeiten und - allgemeiner - von abstrakten Mannigfaltigkeiten ist zentraler Gegenstand der Differentialgeometrie und Differentialtopologie. Mannigfaltigkeiten spielen auch in der mathematischen Physik eine wichtige Rolle.

Als weitere Anwendung des Satzes über implizite Funktionen erhalten wir notwendige Bedingungen an Extrema unter Nebenbedingungen. Wir betrachten hier nur den Fall einer einzigen Nebenbedingung (siehe die ältere hellblaue Ausgabe von Forster 2, Kapitel 8), der weniger allgemein ist als Satz 4 in Abschnitt 9 von Forster 2 (dunkelblau):

Satz 8.3. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir setzen $M := f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$. Sei $a \in M$ so gewählt, dass $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ surjektiv ist (d.h.* $\operatorname{grad} f(a) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ *ist als Abbildung*

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *surjektiv - insbesondere ist also* M *in einer Umgebung von* a *eine Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^n$ *der Dimension* $n-1$*).*

Es sei nun $h : U \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar und* a *sei ein lokales Maximum (Minimum) von* h *unter der Nebenbedingung* $f = 0$*, d.h. es existiert eine Umgebung* $V \subset U \subset \mathbb{R}^n$ *von* a*, so dass* $h(x) \leq h(a)$ $(h(x) \geq h(a))$ *für alle* $x \in M \cap V$*.*

Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ *mit* $\mathrm{grad} h(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad} f(a)$*.*

Man nennt dieses λ einen *Lagrange-Multiplikator*.

Wir betonen, dass man auf diese Weise nur ein notwendiges Kriterium dafür hat, dass a ein lokales Extremum von $h|_M$ ist. Um zu zeigen, dass es sich wirklich um ein Extremum handelt, sind in der Regel weitergehende Überlegungen notwendig. Beispielsweise kommt es oft vor, dass M kompakt ist. Dann folgt automatisch, dass h auf M ein Maximum und Minimum annimmt. Falls diese verschieden sind und die Methode der Lagrange-Multiplikatoren genau zwei Kandidaten für lokale Extrema liefert, so folgt automatisch, dass es sich um das Maximum und Minimum handeln muss.

Als Anwendung dieser Methode besprechen wir Beispiel (9.2.) aus Forster 2: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Wir suchen die Extrema der zugehörigen quadratischen Form $h(x) := \langle Ax, x \rangle$ auf der Einheitskugel $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, d.h. unter der Nebenbedingung $\|x\| - 1 = 0$. Die Methode der Lagrangen Muliplikatoren zeigt, dass jedes Extremum $x \in S^{n-1}$ die Gleichung $Ax = \lambda x$ mit einem geeigneten $\lambda \in \mathbb{R}$ erüllt. Jedes Extremum ist also ein Eigenvektor von A. Da S^{n-1} kompakt ist, nimmt die stetige Funktion h auf S^{n-1} ihr Maximum und Minimum an Punkten x_{min} und x_{max} an. Wir schließen daraus, dass x_{min} und x_{max} Eigenvektoren von A sind. Per Induktion kann man auf diese Art zeigen, dass jede symmetrische reelle Matrix eine Basis aus Eigenvektoren besitzt.

9. Parameterabhängige Integrale

Wir diskutieren Stetigkeit und Differenzierbarkeit von parameterabhängigen Integralen. Als erste Anwendung zeigen wir, dass ein stetig differenzierbares Vektorfeld $v : B_r(p) \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Kugel im $\mathbb{R}^n$ (mit $r > 0$ und $p \in \mathbb{R}^n$) genau dann ein Gradientenfeld ist, wenn $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt. Im Spezialfall $n = 3$ reduziert sich diese Bedingung zu $\mathrm{rot}\, v = 0$. Siehe den hellblauen Forster 2, Kapitel (9.2). Wenn man $B_r(p)$ durch eine allgemeinere offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ersetzt, ist die angegebene Bedingung zwar immer noch notwendig, aber nicht mehr unbedingt hinreichend dafür, dass v ein Gradientefeld ist. Im allgemeinen muss man zusätzlich fordern, dass die sogenannte erste de Rhamsche Kohomologiegruppe $H^1_{dR}(U)$ gleich 0 ist. Dies ist für $U = B_r(p)$ automatisch der Fall. Wir gehen auf die Definition dieser Kohomologiegruppen hier nicht weiter ein - dies geschieht zum Beispiel in Vorlesungen zur Differentialtopologie oder zur algebraischen Topologie. Bei Interesse stelle ich gerne ein Skript zu diesem Thema zur Verfügung.

Als zweite Anwendung leiten wir die Eulersche Differentialgleichung der Variationsrechnung her und bestimmen damit kürzeste Verbindungen zwischen zwei Punkten im $\mathbb{R}^n$ und leiten die Newtonschen Bewegungsgleichungen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung in der mathematischen Physik her. Für Details siehe Forster 2 (dunkelblau), Abschnitt 10.