Mathematisches Institut der LMU
Priv. Doz. Dr. Peter Philip
David Müller und Michael Handrek

Analysis einer Variablen
WiSe 2015/16
26. 11. 2015

Übungsblatt 7

Alle Antworten sind zu ***begründen***.

Aufgabe 25
Seien c und d Abbildungen von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{C}$ und $N, M \in \mathbb{N}_0$.
(a) Angenommen für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^{N} \sum_{\mu=0}^{M} c(\nu, \mu) z^{\nu} \overline{z}^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{N} \sum_{\mu=0}^{M} d(\nu, \mu) z^{\nu} \overline{z}^{\mu}.$$

Zeigen Sie, dass dann für alle $\nu \in \{0, \dots, N\}$ und $\mu \in \{0, \dots, M\}$ gilt $c(\nu, \mu) = d(\nu, \mu)$.
(b) Finden Sie notwendige und hinreichende Bedingungen auf c und d dafür, dass

$$\text{für alle } z \in \mathbb{C}: \sum_{\nu=0}^{N} \sum_{\mu=0}^{N} c(\nu, \mu) z^{\nu} \overline{z}^{\mu} \in \mathbb{R};$$

$$\text{für alle } z \in \mathbb{R}: \sum_{\nu=0}^{N} \sum_{\mu=0}^{N} d(\nu, \mu) z^{\nu} \overline{z}^{\mu} \in \mathbb{R}.$$

(*5+5 Punkte*)

Aufgabe 26
Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit dem Grenzwert a. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$M_n := \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. (*10 Punkte*)

Aufgabe 27
Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$ und y_n sei streng monoton. Angenommen

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

konvergiert, zeigen Sie, dass auch

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n}$$

konvergiert und die Grenzwerte übereinstimmen. Gilt auch die umgekehrte Implikation? (*10 Punkte*)

Aufgabe 28
Für eine positive reelle Zahl $x > 0$ definieren wir

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}}}$$

als Limes der rekursiv definierten Folge $x_1 = \sqrt{x}$, $x_{n+1} = \sqrt{x + x_n}, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass der Grenzwert existiert und gleich $\frac{1+\sqrt{4x+1}}{2}$ ist. Warum gilt nicht

$$\sqrt{0 + \sqrt{0 + \sqrt{0 + \sqrt{0 + \ldots}}}} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \sqrt{4x+1}}{2} = 1?$$

(*10 Punkte*)

Abgabe: Bis Montag, 07. 12. 2015, 10:00 Uhr in den Übungskästen 31 bis 34 im 1. Obergeschoss.