Mathematisches Institut der LMU
Priv. Doz. Dr. Peter Philip
David Müller und Michael Handrek

Analysis einer Variablen
WiSe 2015/16
12. 11. 2015

Übungsblatt 5

Alle Antworten sind zu ***begründen***.

Aufgabe 17
(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positive reelle Zahlen mit $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Beweisen Sie mit der Hilfe von (a), dass dann gilt

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Hinweis: Wir definieren $y \in \mathbb{R}_0^+$ als die n-te Wurzel der nichtnegativen Zahl $x \in \mathbb{R}_0^+$, genau dann wenn $y^n = x$. In diesem Fall definieren wir $\sqrt[n]{x} := y$. (*7+3 Punkte*)

Aufgabe 18
(a) Sei $A_{\mathbb{N}}$ die Menge aller antitonen Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$. Ist $A_{\mathbb{N}}$ abzählbar?
Hinweis: Verwenden Sie Theorem 3.17.
(b) Sei $B_{\mathbb{N}}$ die Menge aller bijektiven Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$. Ist $B_{\mathbb{N}}$ abzählbar?
Hinweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ kann die Menge $\{2n-1, 2n\}$ auf sich selbst auf zwei verschiedene Arten abgebildet werden. (*5+5 Punkte*)

Aufgabe 19
Seien $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für beschränkte A und B gilt

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B,$$
$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B,$$
$$\sup(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \cdot \sup A \text{ für } \lambda \geq 0 \\ \lambda \cdot \inf A \text{ für } \lambda < 0 \end{cases} \qquad \inf(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \cdot \inf A \text{ für } \lambda \geq 0, \\ \lambda \cdot \sup A \text{ für } \lambda < 0. \end{cases}$$

(*10 Punkte*)

Aufgabe 20
a) Seien $m, n, p, k \in \mathbb{N}, k+n \leq p$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion über m:

$$\sum_{i=-k}^{\min(m-k,n)} \binom{m}{k+i}\binom{p}{n-i} = \binom{m+p}{k+n}$$

b) Die *Catalan*-Zahlen C_n sind für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

und sie erfüllen die Rekursion (ohne Beweis)

$$C_0 = 1,\ C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}.$$

Beweisen Sie, dass sie auch die Rekursion $C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1}, n \geq 1$ erfüllen.
c) Beweisen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} k C_k C_{n-k} = \binom{2n+1}{n-1}.$$

(*5+2+3 Punkte*)


Catalan

Katalane

Abgabe: Bis Montag, 23. 11. 2015, 10:00 Uhr in den Übungskästen 31 bis 34 im 1. Obergeschoss.