Mathematisches Institut der LMU
Priv. Doz. Dr. Peter Philip
David Müller und Michael Handrek

Analysis einer Variablen
WiSe 2015/16
21. 01. 2016

Übungsblatt 13

*Alle Antworten sind zu **begründen**.*

Aufgabe 49
Für $a < \xi < b$ betrachte man eine in ξ differenzierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $f'(\xi) > 0$. Zeigen Sie, dass es dann keine Umgebung von ξ geben muss, in der f monoton wachsend oder monoton fallend ist. *(10 Punkte)*

Aufgabe 50
Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < c \leq d < b$ und die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass f' auf $[c, d]$ alle Werte zwischen $\min\{f'(c), f'(d)\}$ und $\max\{f'(c), f'(d)\}$ annimmt. *(10 Punkte)*

Aufgabe 51
a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i.) f ist konvex.

(ii.) Für alle $a, b \in I$ mit $a \neq b$ und jedes $\lambda \in]0, 1[$, gilt

$$f\big(\lambda a + (1 - \lambda)b\big) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

(iii.) Für alle $x_1, x, x_2 \in I$ mit $x_1 < x < x_2$, gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

(iv.) Für alle $x_1, x, x_2 \in I$ mit $x_1 < x < x_2$, gilt

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

(6 Punkte)

b) Sei $a < b$, und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und zweimal differenzierbar $]a, b[$. Zeigen Sie, dass $f'' > 0$ auf $]a, b[$ strenge Konvexität von f impliziert. *(4 Punkte)*

Aufgabe 52
Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktionen

a)
$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}; \quad f(x) := (x^x)^x$$

b)
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad g(x) := x^2 e^x \cos(x)$$

c)
$$w : (0, \infty) \to \mathbb{R}; \quad w(x) := h^{-1}(x)$$

mit $h : (0, \infty) \to (0, \infty); \quad h(x) = xe^x$. *(3+3+4 Punkte)*

Abgabe: Bis Montag, 01. 02. 2016, 10:00 Uhr in den Übungskästen 31 bis 34 im 1. Obergeschoss.