Mathematisches Institut der LMU
Priv. Doz. Dr. Peter Philip
David Müller und Michael Handrek

Analysis einer Variablen
WiSe 2015/16
07. 01. 2016

Übungsblatt 11

Alle Antworten sind zu ***begründen***.

Aufgabe 41
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, für die $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte, monoton wachsende oder fallende Folge.
a) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert.
Hinweis: Zeigen und nutzen Sie die Identität $\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = S_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} S_n(b_n - b_{n+1})$ mit $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. *(8 Punkte)*
b) Finden Sie ein Gegenbeispiel für den Fall, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht monoton ist. *(2 Punkte)*

Aufgabe 42
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen.
a) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.
Hinweis: Machen Sie sich zunächst klar, was "...genau dann ..., wenn ..."bedeutet. *(6 Punkte)*
b) Bestimmen Sie für welche $a \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^a}$$

konvergiert. *(4 Punkte)*

Aufgabe 43
Wir definieren eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt:
Wir schreiben eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ im Quinärsystem, also in einer 5-adische Darstellung, wobei wir die Ziffern mit $\underline{0}, \underline{1}, \underline{+}, \underline{-}, \underline{\cdot}$ bezeichnen (statt $0_5, 1_5, 2_5, 3_5, 4_5$). Um Eindeutigkeit zu garantieren, soll die Periode $\underline{\cdot}$ ausgeschlossen sein. ($\underline{0}.\underline{\cdots}..$ ist nicht möglich, wir schreiben $\underline{1}.\underline{000}..$)
Sollte die Quinärdarstellung von x von der Gestalt sein, dass ab einer bestimmten Stelle ein $\underline{+}$ oder $\underline{-}$ von einer endlichen Anzahl von $\underline{0}$ und $\underline{1}$ gefolgt wird, darauf ein $\underline{\cdot}$ folgt und in den darauf folgenden Ziffern nur noch $\underline{0}$ und $\underline{1}$ vorkommen, so interpretieren wir die Ziffernfolge ab dem $\underline{+}$ oder $\underline{-}$ als Binärzahl b und $f(x) := b$. Zum Beispiel

$$f(\underline{\cdot + +0 - 1000 \cdot 00}..) = -1_2 0_2 0_2 0_2 . 0_2 0_2 .. = -8$$

Ist x nicht von dieser spezifischen Form, dann definieren wir $f(x) := 0$.
a) Zeigen Sie, dass für jedes Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ gilt, dass $f((a, b)) = \mathbb{R}$.
Hinweis: Konstruieren Sie für jedes $y \in \mathbb{R}$ ein $x \in (a, b)$, so dass $f(x) = y$. *(5 Punkte)*
b) Folgern Sie aus a), dass f nicht stetig ist. *(4 Punkte)*
c) Wie steht diese Aufgabe in Zusammenhang mit Aufgabe 35? *(1 Punkt)*

Aufgabe 44
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Bilde jedes Glied der Funktionenfolge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Intervall $[a, b]$ nach $[0, \infty)$ ab und sei stetig. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f_n : [a, b] \to [0, \infty); \quad x \mapsto \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

Zeigen Sie, dass wenn die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine stetige Funktion $f : [a, b] \to [0, \infty)$ konvergiert, dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $g_n := f - f_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und führen Sie einen indirekten Beweis. *(10 Punkte)*

Abgabe: Bis Montag, 18. 01. 2015, 10:00 Uhr in den Übungskästen 31 bis 34 im 1. Obergeschoss.