Dr. Mark Hamilton
Stefanie Motzokan
Konstantinos Zacharis

Wintersemester 2016/17

Vorlesung: Mathematik für Naturwissenschaftler I
Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert der angegebenen Folgen.

(a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

(b) $b_n = \frac{4kn^7(1+\frac{k}{n!})(n^3-n^2)}{(n^3+2k)(n^5+(n+1)^2)n^2}$, wobei $k \in \mathbb{N}$ konstant.

(c) $c_n = \frac{3^n-3^{n-2}}{3+3^n}$

(d) $d_n = \frac{2^n+(-3)^n}{(-2)^n+3^n}$

Aufgabe 2.

(a) Die Bernoulli-Ungleichung lautet:

Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Zeigen Sie diese Ungleichung für $x > 0$ ohne vollständige Induktion und für $-1 \leq x \leq 0$ mit vollständiger Induktion.

(b) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen und sei $1 < m \leq n$ für $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_{m-1}}.$$

Aufgabe 3. Die Folge $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen die Eulersche Zahl e. Zeigen Sie Folgendes (am besten in der angegebenen Reihenfolge und unter Verwendung der in Klammern angegebenen Hinweise).

(a) Ist $q \in \mathbb{Q}^+$, so gilt $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n^{1+q}})^n = 1$. (Bernoulli-Ungleichung, Einschließung)

(b) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$. (Dritte binomische Formel, Teilaufgabe a), ein Grenzwertsatz)

(c) Ist $q \in \mathbb{Q}^+$, so gilt $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^{1+q}})^n = 1$.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Mittwoch, 07. Dezember 2016, 12:00 Uhr** in dem Briefkasten im 1. Stock ab. Lösungen bitte immer auf einem separaten Blatt (nicht auf dem Angabenblatt) und mit Namen abgeben!