



Dr. Mark Hamilton
Stefanie Motzokan
Konstantinos Zacharis

Wintersemester 2016/17

Vorlesung: Mathematik für Naturwissenschaftler I Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Zu jeder positiven reellen Zahl a sei

$$\begin{aligned}\exp_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \exp(x \cdot \ln(a))\end{aligned}$$

die **Exponentialfunktion zur Basis a** . Statt $\exp_a(x)$ schreibt man meistens einfach a^x . Zeigen Sie mit dieser Definition und den Eigenschaften der Funktionen \exp und \ln :

- (a) $(a^x)^y = a^{xy}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- (b) Ist auch b eine positive reelle Zahl, so gilt $a^x b^x = (ab)^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2.

- (a) Beweisen Sie: $\cos(2x) = -1 + 2 \cos^2(x) = \frac{-\tan^2(x) + 1}{\tan^2(x) + 1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Die Funktionen Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus werden definiert durch

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Beweisen Sie folgendes Additionstheorem:

$$\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3. Zur Beschreibung des Zerfalls eines radioaktiven Stoffes verwendet man die Formel

$$f(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda t).$$

Dabei steht N_0 für die Anzahl der Atome zum Zeitpunkt $t = 0$ und $\lambda > 0$ ist eine vom Stoff abhängige Zerfallskonstante (der physikalischen Dimension $[\text{Zeit}]^{-1}$). Der Term $f(t)$ beschreibt die "Anzahl" der Atome zum Zeitpunkt t (diese Zahl ist möglicherweise irrational).

- (a) Ermitteln Sie die Halbwertszeit, also den Zeitpunkt t_H , an dem die Zahl der anfangs vorhandenen Atome durch Zerfall auf die Hälfte abgenommen hat.
- (b) Nach welchen Zeitpunkten, ausgedrückt in der Halbwertszeit, sind vom radioaktiven Stoff nur noch 25% bzw. 5% bzw. 1% vorhanden?

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Mittwoch, 18. Januar 2017, 12:00 Uhr** in dem Briefkasten im 1. Stock ab. Lösungen bitte immer auf einem separaten Blatt (nicht auf dem Angabenblatt) und mit Namen abgeben!