

Tutoriumsblatt 9 zu Funktionentheorie

15.06–21.06

Aufgabe 1: Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen Lage und Art aller isolierten Singularitäten in \mathbb{C} und berechnen Sie in den Singularitäten die Residuen.

(a) $\frac{z}{(z-i)(z+1)^2}$

(b) $\frac{z+1}{z^4-1}$

(c) $\frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$

Aufgabe 2: Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} \frac{2z+1}{z^2-z-2} dz$$

für die folgenden Kurven $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$

(a) $\gamma(t) := \frac{1}{2}e^{it}$

(b) $\gamma(t) := 2 + e^{it}$

(c) $\gamma(t) := 2 + e^{3it}$

(d) $\gamma(t) := 5e^{it}$

Aufgabe 3: Seien $P, Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ Polynome mit $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ und so, dass Q auf \mathbb{R} keine Nullstelle hat. Es seien a_1, \dots, a_k die (komplexen) Nullstellen von Q mit positivem Imaginärteil, $\text{Im}(a_j) > 0$ für $j = 1, \dots, k$. Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res} \left(\frac{P}{Q}; a_j \right).$$