Tutoriumsblatt 8 zu Funktionentheorie

08.06–14.06

Aufgabe 1: Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen Lage und Art aller isolierten Singularitäten in $\mathbb{C}$:

(a) $z \to \frac{z}{1-e^z}$

(b) $z \to \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$

Aufgabe 2: Man zeige direkt (ohne die Verwendung allgemeiner Satze), dass die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\to \mathbb{C} \\ z &\to e^{\frac{1}{z}} \end{aligned}$$

in jeder Umgebung $\mathcal{B}(0, r) \setminus \{0\}; r > 0$ jeden Wert $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (sogar unendlich oft) annimmt.

Aufgabe 3: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\epsilon > 0$ sowie und $f : B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass die isolierte Singularität z_0 kein Pol der Funktion $\exp \circ f$ sein kann.

Aufgabe 4: Berechnen Sie folgendes Integral mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5 - 3\sin t)^2} \mathrm{d}t$$