Tutoriumsblatt 7 zu Funktionentheorie

01.06–07.06

Aufgabe 1: Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der folgenden Laurent-Reihen:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n; \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n+1}; \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{e^{\alpha n}+e^{-\alpha n}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung der holomorphen Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0, i, 2\} \to \mathbb{C}, \quad z \to \frac{1}{z(z-i)(z-2)}$$

auf den Gebieten $\mathcal{K}_0(0,1)$, $\mathcal{K}_0(1,2)$ und $\mathcal{K}_0(2,\infty)$. Geben Sie zusätzlich (wie in der Vorlesung) die Zerlegung in f_+ und f_- an.
(Für $a \in \mathbb{C}$ ist $\mathcal{K}_a(r,R) : \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$.)

Aufgabe 3: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einer Nullstelle $z_0 \in \Omega$ der Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass man genau dann nahe z_0 aus f eine holomorphe k-te Wurzel ziehen kann, wenn k ein Teiler von n ist.

Aufgabe 4:

(a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen komplexer Zahlen, die jeweils eine Potenzreihe definieren:

$$P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n; \qquad Q(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

Man zeige oder widerlege: Besitzt die Gleichung $P(z) = Q(z)$ unendlich viele Losungen, so ist $P = Q$ und damit $a_n = b_n$ fur alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine von der Nullfunktion verschiedene analytische Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$, dann ist die Nullstellenmenge von f (hochstens) abzahlbar.