Tutoriumsblatt 6 zu Funktionentheorie

25.05–31.05

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass für eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Potenzreihenentwicklung

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad z \in \mathbb{C}$$

die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g(ix) \in \mathbb{R}$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\overline{a_n} = (-1)^n a_n$

(iii) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{g(z)} = g(-\overline{z})$.

Aufgabe 2: Man entscheide, ob es analytische Funktionen $f_j : \mathcal{B}(0,1) \to \mathbb{C}, \quad j = 1, ..., 4$ gibt, sodass

(a) $f_1(\frac{1}{2n}) = f_1(\frac{1}{2n-1}) = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$

(b) $f_2(\frac{1}{n}) = f_2(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1$

(c) $f_3^{(n)}(0) = (n!)^2, \quad n \geq 0$

(d) $f_4^{(n)}(0) = \frac{n!}{n^2}, \quad n \geq 0$

Aufgabe 3: Sei $r > 0$ und $f : \mathcal{B}(0,r) \to \mathbb{C}$ analytisch, sodass $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathcal{B}(0,r) \cap \mathbb{R}$. Zeigen sie, dass die Taylorkoeffizienten von f zum Entwicklungspunkt 0 reell sind und dass gilt: $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$.

Aufgabe 4: Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei analytische Funktionen, und es gelte

$$f(g(z)) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Man zeige: Ist g nicht konstant, so ist $f \equiv 0$.

Aufgabe 5: Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ analytische Funktion. Desweiteren sei $z_0 \in \Omega$ und

$$R := \sup \left\{ \rho \in \mathbb{R}^+ : \mathcal{B}(z_0, \rho) \subset \Omega \right\}$$

d.h. $\mathcal{B}(z_0, R)$ ist die grösste offene Kreisscheibe, die noch in Ω enthalten ist.

(a) Man zeige: Falls f auf $\mathcal{B}(z_0, R)$ nicht beschränkt ist, dann ist R gleich dem Konvergenzradius r der Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt z_0.

(b) Man gebe ein Beispiel an, in dem $r > R$ ist, obwohl sich f auf keine Teilmenge aus $\mathbb{C}$, die Ω echt umfasst, analytisch fortsetzen lässt.