

Tutoriumsblatt 5 zu Funktionentheorie

18.05–24.05

Aufgabe 1: Bestimmen Sie alle Paare (f, g) ganzer Funktionen, sodass

$$f^2 + g^2 = 1 \tag{1}$$

Ergebnis: $f = \cos \circ h$ und $g = \sin \circ h$ mit einer beliebigen ganzen Funktion h .

Aufgabe 2: (Zum Beweis von Satz 15 aus der Vorlesung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, sodass $\mathcal{B}(0, 1) \subset \Omega$ und $z_0 \in \mathcal{B}(0, 1)$, dann ist $\mathcal{B}(z_0, \rho) \subset \Omega$ für ein $0 < \rho < 1 - |z_0|$. Desweiteren sei $f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf $\Omega \setminus \{z_0\}$. Sei γ_1 die Kurve entlang des Randes von $\mathcal{B}(0, 1)$ (gegen den Uhrzeigersinn) und genauso γ_2 die Kurve entlang des Randes von $\mathcal{B}(z_0, \rho)$ (gegen den Uhrzeigersinn).

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz \tag{2}$$

Aufgabe 3: Gegeben sei die Potenzreihe

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \end{aligned} \tag{3}$$

mit $a_n \in \mathbb{C}$. Diese konvergiere absolut für $z_1 \in \mathbb{C}$ (mit $z_1 \neq 0$).

- (a) Sei $r > 0$. Zeigen Sie, dass $f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq r < |z_1|$ absolut und gleichmässig konvergiert.
- (b) Betrachten Sie nun die Potenzreihe $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $|a|, |b| \leq r < |z_1|$. Es bezeichne $f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$. Zeigen Sie:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b f_N(x) dx \tag{4}$$

also, dass Sie in diesem Fall Integration und Limesbildung vertauschen können.

Aufgabe 4: (vgl. Bemerkung im Skript auf Seite 46)

Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetige Funktionen für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\left(\sum_{n=0}^N f_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ normal konvergent (f bezeichne den Grenzwert). Zeigen, dass dann auch f stetig ist und

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz \tag{5}$$

für einen beliebigen, geschlossenen $\mathcal{C}^1$ -Weg $\gamma \subset \Omega$.