Tutoriumsblatt 4 zu Funktionentheorie

11.05–17.05

Aufgabe 1:

(a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze, nicht-konstante Funktion. Zeigen Sie, dass dann das Bild von f dicht in $\mathbb{C}$ liegt, d.h. dass es zu jedem $\omega \in \mathbb{C}$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $z \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $|f(z) - \omega| < \epsilon$.
Tipp: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis, indem Sie den Satz von Liouville auf eine geeignete Funktion anwenden.

(b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und $M \in \mathbb{R}$ eine Zahl, sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\operatorname{Re} f(z) \leq M$$

Zeigen Sie, dass f dann konstant ist.

Aufgabe 2:
Berechnen Sie mit Hilfe der Cauchy-Integralformel folgende Integrale:

(a) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2(z^2-4)} \mathrm{d}z$

(b) $\int_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z^2(z^2-4)} \mathrm{d}z$

(c) $\int_{|z|=r} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)^m} \mathrm{d}z, \qquad |a| < r < |b|, \quad n, m \in \mathbb{N}$

(d) $\int_{|z|=1} z \sin(\overline{z}) \mathrm{d}z$

Aufgabe 3:
Betrachte die Funktion

$$f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}; \qquad x \to \frac{e^{-x^2}}{x+1}$$

Zeigen Sie, dass die n-te Ableitung der Funktion f für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ folgende Abschätzung erüllt:

$$|f^{(n)}(x)| \leq e\, n!\, x^{-1}\, e^{-x^2+2x}$$

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

Tipp: Betrachten Sie als Integrationsweg den Rand eines Halbkreisrings mit Aussenradius R und Innenradius R^{-1} in der oberen komplexen Halbebene.