Tutoriumsblatt 3 zu Funktionentheorie

04.05–10.05

Aufgabe 1:
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \mathrm{d}t$$

(b) Zeigen Sie, dass $|f|$ kein striktes lokales Maximum auf $\mathbb{C}$ annimmt.

Aufgabe 2:
Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ia)^2} \mathrm{d}x$$

Tipp: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = e^{-\frac{1}{2}z^2}$ und berechnen Sie das Integral $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ über einen geeigneten Weg γ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3:
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Desweiteren sei $\operatorname{Re} f'(z) \neq 0 \ \ \forall z \in \Omega$ oder $\operatorname{Im} f'(z) \neq 0 \ \ \forall z \in \Omega$. Zeigen Sie, dass f dann injektiv ist.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend ist.