Tutoriumsblatt 2 zu Funktionentheorie

27.04–03.05

Aufgabe 1:
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein offenes Gebiet und sei die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Zusätzlich nehme man an, dass eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $\operatorname{Re} f$ ist konstant

(ii) $\operatorname{Im} f$ ist konstant

(iii) $|f|$ ist konstant

Zeigen Sie, dass aus jeder dieser drei Annahmen folgt, dass auch f konstant ist.

Aufgabe 2:

(a) Sei γ die durch $z(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ parametrisierte Kurve und $-\gamma$ entgegengesetzt orientierte Kurve, siehe Vorlesung. Zeigen Sie, dass dann für jede stetige Funktion f auf γ gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

(b) Sei γ die glatte Kurve in $\mathbb{C}$, die den Einheitskreis um 0 gegen den Uhrzeigersinn durchläuft. Berechnen Sie:

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

(c) Berechnen Sie das Integral aus Teilaufgabe (b) erneut, wobei nun γ die die Kurve entlang einer Raute um den Ursprung (gegen den Uhrzeigersinn) sein soll. Die Eckpunkte der Raute seien gegeben durch: $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}$ mit $a_1 = a; a_2 = ia; a_3 = -a; a_4 = -ia$.

Aufgabe 3:
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für die partiellen Ableitungen des zugehörigen Vektorfelds $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(0,0) = 0$$

gilt, also die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen in $(x, y) = (0, 0)$ gelten. Zeigen Sie weiter, dass die Funktion f nicht stetig in 0 ist. Insbesondere ist also f nicht komplex differenzierbar in 0. Vergleichen Sie das mit Satz 4 der Vorlesung.

In der folgenden Aufgabe arbeiten wir mit dem in der Vorlesung vorgestellten Konzept der Kurvenlänge. Sei $I := [a, b]$ ein Intervall. Wie in der Vorlesung definieren wir Zerlegungen $Z := (t_0, t_1, ..., t_n)$ mit $t_i < t_i + 1$ sowie $t_0 = a, t_n = b$ von I. Falls für eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

$$L(\gamma) := \sup_Z \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| < \infty$$

gilt, bezeichnet man γ als rektifizierbar. $L(\gamma)$ ist dann die Kurvenlänge von γ.

Aufgabe 4:

(i) Parametrisieren Sie den (topologischen) Rand ∂Q_1 der box $Q_1 := \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \in [0,1]\}$ mit einer stückweisen C^1 Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ sodass $\gamma|_{[a,b)}$ injektiv ist. Berechnen Sie dann $L(\gamma)$.

(ii) Parametrisieren Sie die 1-Sphäre $S_1 := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ mit einer stückweisen C^1 Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ sodass $\gamma|_{[a,b)}$ injektiv ist. Berechnen Sie dann $L(\gamma)$.

(iii) Zeigen Sie, dass stückweise C^1 Kurven $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ rekzifizierbar sind, und

$$L(\gamma) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\gamma'(t)| \mathrm{d}t \tag{1}$$

für die Kurvenlänge gilt, wo $(t_j)_j$ eine Zerlegung von $[a,b]$ ist mit $\gamma|_{(t_j,t_{j+1})} \in C^1((t_j, t_{j+1}))$ für $j = 0, ..., n-1$.

(iv) Berechnen Sie nun die Länge $L(\gamma)$ der Kurven aus Teilaufgaben (i),(ii) via Formel (1).