Tutoriumsblatt 11 zu Funktionentheorie

29.6–6.7

Aufgabe 1: Sei $a > 0$ und $f \in \mathcal{F}_a$. Dann gilt $f^{(n)} \in \mathcal{F}_b$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $0 < b < a$.

Aufgabe 2: Sei $\mathcal{M}$ die in der Vorlesung definierte Klasse von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, sodass es Konstanten A, A' gibt mit

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$
$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{A'}{1+\xi^2} \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie dann:

(i) Sei $f \in \mathcal{M}$ und $y \in \mathbb{R}$. Für die Funktion $f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert als $f_y(x) := f(x+y)$ gilt

$$\widehat{f_y}(\xi) = e^{i\xi y}\hat{f}(\xi) \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}.$$

(ii) Sei $f \in \mathcal{M}$ und $\delta > 0$. Für die Funktion $f^\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert als $f^\delta(x) := f(\delta x)$ gilt

$$\widehat{f^\delta}(\xi) = \delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}\xi) \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}.$$

(iii) Für $f, g \in \mathcal{M}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(iv) Sei $\delta > 0$.Für die Funktionen $G_\delta(x) := \exp(-\delta x^2/2)$ und $K_\delta(x) := \delta^{-1/2}\exp(-x^2/(2\delta))$ $(x \in \mathbb{R})$ gilt

$$\widehat{G_\delta}(\xi) = K_\delta(\xi) \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}.$$

Tipp: Verwenden Sie Tutorienblatt 3, Aufgabe 2.

(v) Es gilt die Inversionsformel:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Tipp: Zeigen Sie die Inversionsformel zunächst für $x = 0$.

Aufgabe 3: Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes (also auf anderem Weg als in Aufgabe 2, Tutorienblatt 3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \exp\left(\frac{x^2}{2\delta}\right) = \sqrt{2\pi}.$$

Dazu können Sie zum Beispiel wie folgt vorgehen. Für $\beta := \sqrt{\pi}\exp(i\pi/4)$ und die meromorphe Funktion $f(z) := e^{-z^2}/(1+e^{-2\beta z})$ gilt $f(z) - f(z+\beta) = e^{-z^2}$. Verwenden Sie nun den Residuensatz mit den Kurven γ_R definiert als die Kurvensumme der linearen Verbindungswege der Punkte $R, R+\beta, -R+\beta, -R$.