Tutoriumsblatt 10 zu Funktionentheorie

22.06–28.06

Aufgabe 1: Zeigen Sie für die Nullstellen des Polynoms $p(z) := z^4 + 6z + 3$

(i) p hat genau eine Nullstelle in $B(0,1)$

(ii) Die restlichen drei Nullstellen liegen in $B(0,2) \setminus \overline{B(0,1)}$

Aufgabe 2: Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| > \exp(1)$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $\alpha z \exp(z) = 1$ genau eine Lösung in $B(0,1)$ besitzt.

Aufgabe 3: Beweisen Sie (mal wieder) den Fundamentalsatz der Algebra: Ein Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat genau $\deg(p)$ (entsprechend Ihrer Vielfachheit gezählte) Nullstellen. Aber diesmal mit Hilfe des Satzes von Rouché!

Zusatzaufgabe: (Diese Aufgabe hängt nicht direkt mit dem aktuellen Stoff zusammen und ist für jene gedacht, die die ersten drei Aufgaben bereits bearbeitet haben!) Ziel der Aufgabe ist, sich mit der Gammafunktion vertraut zu machen.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\} \ni z \mapsto \Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \tag{1}$$

wohldefiniert ist (das obige Integral insbesondere absolut konvergiert) und eine analytische Funktion definiert. In (1) ist $t^{z-1} := \exp((z-1)\log t)$ und log derart gewählt, dass $\log t \in \mathbb{R}$ für $t \in \mathbb{R}_{>0}$.

(ii) Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ die Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

gilt (also insbesondere $\Gamma(n+1) = n!$) und leiten Sie daraus die Darstellung

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

her.

(iii) Die Γ-Funktion wie in Teilaufgabe (i) definiert besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einer analytischen Funktion $\widetilde{\Gamma}$ (die typischerweise ebenfalls mit Γ bezeichnet wird) mit Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$. Die isolierten Singularitäten bei $-n$, $n \in \mathbb{N}_0$, sind Pole erster Ordnung und für die Residuen gilt

$$\operatorname{Res}(\widetilde{\Gamma}; -n) = \frac{(-1)^n}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$