Übungsblatt 9 zu Funktionentheorie

Aufgabe 1: Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener C^1-Weg. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathrm{Int}(\gamma) := \overline{\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Ran}(\gamma) : n(\gamma; z) \neq 0\}}$$

eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. $n(\gamma; z)$ ist hier die in der Vorlesung definierte Windungszahl der Kurve γ am Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Ran}(\gamma)$.

Aufgabe 2:

(i) Seien $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Für die (nicht konstanten) holomorphen Funktionen

$$f, g : B(a, r) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$$

sei a eine nicht-wesentliche Singularität. Dann ist a auch eine nicht-wesentliche Singularität der Funktionen $f + g$, $f \cdot g$ und f/g, wobei wir im letzen Fall $g(z) \neq 0$ für $z \in B(a, r) \setminus \{a\}$ annehmen. Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} N(f + g) &\geq \min\{N(f), N(g)\}, \\ N(f \cdot g) &= N(f) + N(g), \\ N(f/g) &= N(f) - N(g). \end{aligned}$$

(ii) Für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ sei $f : B(a, r)\setminus\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(z) \neq 0$ für $z \in B(a, r)\setminus\{a\}$. Angenommen für die isolierte Singularität von f bei a gilt $N(f) \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Zeigen Sie dann, dass die Funktion f'/f bei a einen Pol erster Ordnung hat und berechnen Sie das Residuum $\mathrm{Res}(f'/f, a)$.

Aufgabe 3: Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, \mathrm{d}x.$$

Tipp: Betrachten Sie für $R > 0$ *die stückweise* C^1*-Kurve bestehend aus den Geraden* $[-R, R], [R, R + i\pi], [R + i\pi, -R + i\pi], [-R + i\pi, -R]$.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie alle biholomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
Tipp: Seigen Sie, dass für eine injektive ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *die auf* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *definierte Funktion* $g := f(1/\cdot)$ *keine wesentliche Singularität bei* 0 *hat.*

Abgabe je Zweiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 15.06.2016.