Aufgabe 7 Wollen zeigen, dass $\mathrm{Int}(\gamma)$ beschränkt ist. Per Def. gilt

$$n(\gamma;z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\,d\xi \quad, z \in \mathbb{C} / \mathrm{Ran}(\gamma).$$

Sei $M := \sup\{|z| : z \in \mathrm{Ran}(\gamma)\}$, dann gilt für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > M$

$$n(\gamma;z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_a^b \left|\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\right| dt \leq \frac{1}{|z| - M}\underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt}_{=:C}$$

$$= \frac{C}{|z| - M} \xrightarrow{z \to \infty} 0.$$

Da $n(\gamma;\cdot)$ auf $\mathbb{C} / \overline{B(0,M)}$ konstant ist (siehe VL.) folgt $n(\gamma;z) = 0$ für $z \in \mathbb{C} / \overline{B(0,M)}$

Aufgabe 2(i) Wir verwenden folgende Hilfsbemerkungen (vgl. auch VL. und ÜB. 8)

(i) Für Fkt. $h: B(a,r)\setminus\{a\} \to \mathbb{C}$ mit isolierter Sing. bei $a \in \mathbb{C}$ gilt $N(h) \geq k$ g.d.w. die Fkt. $\Omega \ni z \longmapsto h(z)(z-a)^{-k}$ kann zu holo. Fkt. $\tilde{h}_k$ fortgesetzt werden (um a)

(ii) Für h wie in (i) gilt: $N(h) = k$ g.d.w. für die Fortsetzung $\tilde{h}_k$ aus (i) gilt: $\tilde{h}_k(a) \neq 0$

Dann: (1) Die Fkt. $z \longrightarrow (f(z)+g(z))(z-a)^{-\min\{N(f),N(g)\}}$

$= f(z)(z-a)^{-\min\{N(f),N(g)\}} + g(z)(z-a)^{-\min\{N(f),N(g)\}}$

kann zu holo. Fkt. fortgesetzt werden, da $N(f), N(g) \geq \min\{N(f),N(g)\}$ und (i)

(2) Die Fkt. $z \longrightarrow (f\cdot g)(z)(z-a)^{-(N(f)+N(g))}$ ist holo. fortsetzbar, da

$(f\cdot g)(z)(z-a)^{-(N(f)+N(g))} = \underbrace{f(z)(z-a)^{-N(f)}}_{\text{holo. fortsetzbar zu } \tilde{f}} \underbrace{g(z)(z-a)^{-N(g)}}_{\text{holo. fortsetzbar zu } \tilde{g}}$

$= \tilde{f}(z)\ \tilde{g}(z)$

und es gilt $\lim_{z\to a} \tilde{f}(z) \neq 0$, $\lim_{z\to a} \tilde{g}(z) \neq 0$,

d.h. $N(fg) = N(f) + N(g)$

(3) Bew. folgt wie in (2) und mit

$\frac{f(z)}{g(z)}(z-a)^{-(N(f)-N(g))} = \frac{f(z)(z-a)^{-N(f)}}{g(z)(z-a)^{-N(g)}} = \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$

Zum Beweis der Hilfsbehauptung:

- $N(h) \geq K$, dann $h(z) = \sum_{n \geq N(h)} a_n (z-a)^n =$

$= \sum_{n \geq K} a_n (z-a)^n$ für die Laurentreihe von h

in $B(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$. D.h.

$$h(z) \cdot (z-a)^{-K} = \sum_{n \geq K} a_n (z-a)^{n-K} =$$

$$= \sum_{n \geq 0} a_{n+K} (z-a)^n$$

und $z \to h(z)(z-a)^{-K}$ kann auf $B(a,\varepsilon)$ holo. fortgesetzt werden.

- Falls $z \to h(z)(z-a)^{-K}$ auf $B(a,\varepsilon)$ holo. fortgesetzt werden kann, ist a hebbare Sing. von $z \to h(z)(z-a)^{-K}$. Mit der Eindeutigkeit der Laurententwicklung also $N(h) \geq K$.

- Der Beweis von (ii) funktioniert analog; sei z.B. $N(h) = K$, also $h(z) = \sum_{n \geq N(h)} a_n (z-a)^n$ mit $a_{N(h)} \neq 0$, dann

$z \mapsto h(z)(z-a)^{-N(h)} = \sum_{n \geq 0} a_{n+N(h)} (z-a)^n$ ist analytisch fortsetzbar auf $B(a,\varepsilon)$ und (normale Kgz. der Taylorreihe)

$$\lim_{z \to a} h(z)(z-a)^{-N(h)} = a_{N(h)} \neq 0$$

(ii) Mit Teilaufgabe (i) gilt $\nu(\frac{f'}{f}) = \nu(f') - \nu(f)$.

Für die Laurentreihe $f(z) = \sum_{n \geq \nu(f)} a_n (z-a)^n$ für ~~auf~~ $z \in B(a,r) \setminus \{a\}$ gilt (normale Kgz.) $[n \neq 0]$

$$f'(z) = \sum_{n \geq \nu(f)} a_n n (z-a)^{n-1} = \sum_{n \geq \nu(f)-1} a_{n+1}(n+1)(z-a)^n$$

Also $\nu(f') = \nu(f) - 1$ und also

$\nu(\frac{f'}{f}) = (\nu(f) - 1) - \nu(f) = -1$, d.h. $\frac{f'}{f}$ hat bei a einen Pol 1. Ordnung

Nach VL. gilt also

$$\operatorname{Res}(\frac{f'}{f}, a) = \lim_{z \to a} (z-a) \frac{f'(z)}{f(z)} =$$

$$= \lim_{z \to a} \frac{(z-a)^{-(\nu(f)-1)} f'(z)}{(z-a)^{-\nu(f)} f(z)} = \frac{a_{\nu(f)} \nu(f)}{a_{\nu(f)}}$$

Aufgabe 3: Die Funktion $z \to \frac{1}{e^z + e^{-z}}$ hat isolierte Singularitäten bei den (isolierten) Nullstellen von $z \to e^z + e^{-z}$.

Die Gleichung $e^z + e^{-z} = 0$ hat Lösungsmenge $\{i(\pi k + \frac{\pi}{2}) : k \in \mathbb{Z}\}$.

Für $R > 0$ definieren wir Kurven $\gamma_1, .., \gamma_4$ (Längen von R ab) als

$$\gamma_1 : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{C}, \; t \mapsto \gamma_1(t) := t$$
$$\gamma_2 : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}; \; t \mapsto \gamma_2(t) := R + it$$
$$\gamma_3 : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{C}; \; t \mapsto \gamma_3(t) := -t + i\pi$$
$$\gamma_4 : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \; t \to \gamma_4(t) := -R + i(\pi - t)$$

Dann ist $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ eine geschlossene stückweise C^1-Kurve.

Der Residuensatz ist anwendbar und liefert

$$2\pi i \operatorname{Res}(f, i\tfrac{\pi}{2}) = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz + \int_{\gamma_4} f(z)\,dz$$

mit $f(z) := \frac{1}{e^z + e^{-z}}$ (def. auf $\mathbb{C} \setminus \{i\pi(k + \frac{1}{2}) : k \in \mathbb{Z}\}$).

- $$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$$

- $$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{(-1)}{e^{-x}\underbrace{e^{+i\pi}}_{=-1} + e^x \underbrace{e^{-i\pi}}_{=-1}}\,dx = \int_{-R}^{R} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$$

- $\left| \int_{\gamma_2} f(z)\, dz \right| \le \int_0^{\pi} \frac{1}{|e^R e^{it} + e^{-R} e^{-it}|}\, dt \le$

$\le \frac{\pi}{e^R - 1} \xrightarrow{R \to \infty} 0$

- $\left| \int_{\gamma_4} f(z)\, dz \right| \xrightarrow{R \to \infty} 0$ analog.

Insgesamt:

- $\int_{\gamma} f(z)\, dz \xrightarrow{R \to \infty} 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$

(l'Hospital, Blatt 8 Aufg. 2)

- $\int_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i\frac{\pi}{2}) = \lim_{z \to i\frac{\pi}{2}} \left(\frac{z - z_0}{e^z + e^{-z}} \right) = \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{-\frac{i\pi}{2}}} =$

$\left(= \frac{1}{2i} \right)$

Also $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = 2\pi i \frac{\operatorname{Res}(f, i\frac{\pi}{2})}{2} = \frac{\pi}{2}$

Aufgabe 4 f kann als Taylorreihe um 0 geschrieben werden,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Also für $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$f(\tfrac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\tfrac{1}{z})^n.$$

Die Funktion $f(\frac{1}{\cdot}) : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(\frac{1}{z})$, ist holomorph und injektiv (da f injektiv), mit isolierter Singularität bei $0 \in \mathbb{C}$.

Da $f(\frac{1}{\cdot})$ holomorph ist, ist die Menge $f(\frac{1}{\cdot})(B(1,\frac{1}{2})) \subset \mathbb{C}$ offen. Da $f(1) \in f(\frac{1}{\cdot})(B(1,\frac{1}{2}))$ gibt es $\varepsilon > 0$ s.d.

$$B(f(1),\varepsilon) \subset f(\tfrac{1}{\cdot})(B(1,\tfrac{1}{2})).$$

Angenommen $0 \in \mathbb{C}$ ist wesentliche Singularität von $f(\frac{1}{\cdot})$. Dann (Casorati-Weierstraß) gibt es Folge $(z_n)_n \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit

- $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$
- $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{z_n}) = f(1)$

Dann ist $f(\frac{1}{\cdot})$ aber nicht injektiv, denn für n hinreichend groß gilt $z_n \notin B(1,\frac{1}{2})$.

Also ist ∞ keine wesentliche Singularität von $f(\frac{1}{z})$.

$$f(\tfrac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\tfrac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{0} a_{-n} z^{n}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

ist die Laurententwicklung von $f(\frac{1}{\cdot})$ um ∞, und da ∞ keine wesentl. Singularität ist gibt es $N \in \mathbb{N}$ sd. $a_n = 0$ für $n \geq N$, d.h. f ist ein Polynom (von Grad $\leq N$).

Da f injektiv ist hat f (höchstens) eine Nullstelle in $\mathbb{C}$, ist (Fundamentalsatz d. Algebra) also von Grad 1, es gibt $z_0 \in \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ sd. $f(z) = c(z - z_0)$, $z \in \mathbb{C}$.

Umgekehrt ist jede Funktion dieser Form biholomorph.