Übungsblatt 8 zu Funktionentheorie

Aufgabe 1: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie dann, dass a ein Pol 1. Ordnung von f ist genau dann wenn $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) \neq 0$ (d.h. insbesondere, dass der Limes existiert).

Aufgabe 2: Wir wollen die folgende komplexe Version der L'HOSPITAL'schen Regel beweisen: Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ analytische Funktionen. Wenn beide Funktionen bei $z_0 \in \Omega$ eine Nullstelle k-ter Ordnung haben, dann hat $h := \frac{f}{g}$ in z_0 eine hebbare Singularität, und es gilt

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}$$

Aufgabe 3: Wir definieren die Fibonaccifolge: Seien $a_0 = a_1 := 1$ und $a_n := a_{n-2} + a_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Dann gilt:

(i) Durch

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

wird eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \geq 1/2$ definiert und es gilt für $z \in B(0, 1/2)$

$$f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}.$$

Tipp: Angenommen es gilt $(1-z-z^2)P(z) = 1$ für eine lokal um 0 analytische Funktion P. Entwickeln Sie dann P als Potenzreihe um die 0 um zu zeigen, dass die Koeffizienten dieser Potenzreihe mit den Fibonaccizahlen a_n übereinstimmen.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Binet'sche Formel für Fibonacci Zahlen:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Tipp: Führen Sie eine Partialbruchzerlegung von $1/(1-z-z^2)$ durch.

Aufgabe 4: Besselfunktionen! Zu $\nu \in \mathbb{Z}, \omega \in \mathbb{C}$ sei $\mathcal{J}_\nu(\omega)$ der ν-te Koeffizient der Laurententwicklung der Funktion

$$f_\omega : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto f_\omega(z) := \exp\left(\frac{\omega}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

d.h. es gilt $f_\omega(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_\nu(\omega) z^\nu$. Die Koeffizienten $\mathcal{J}_\nu(\omega)$ der Laurententwicklung von den Funktionen f_ω, $\omega \in \mathbb{C}$, können dann als Funktionen $\mathcal{J}_\nu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die sogenannten Besselfunktionen, aufgefasst werden. Ziel der Aufgabe ist, einige Eigenschaften der Besselfunktionen zu besprechen.

(i) Für $\nu \in \mathbb{Z}$ und $\omega \in \mathbb{C}$ gilt $\mathcal{J}_\nu(-\omega) = \mathcal{J}_{-\nu}(\omega) = (-1)^\nu \mathcal{J}_\nu(\omega)$.

(ii) Es gilt

$$\mathcal{J}_\nu(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\nu t - \omega\sin(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\nu t - \omega\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

(iii) Die Funktionen $\mathcal{J}_\nu$ sind ganz. Für $\nu \geq 0$ gilt für die Taylorreihe um $z_0 = 0$

$$\mathcal{J}_\nu(\omega) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu \left(\frac{\omega}{2}\right)^{2\mu+\nu}}{\mu!(\nu+\mu)!}.$$

(iv) Die Besselfunktionen $\mathcal{J}_\nu$ lösen die Besselsche Differentialgleichung

$$\omega^2 f''(\omega) + \omega f'(\omega) + (\omega^2 - \nu^2) f(\omega) = 0.$$

Abgabe je Zweiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 8.06.2016.